Énoncé et Correction Détaillée

Statistiques et Loi Normale — Exercice 1

Énoncé de l'Exercice 1

1. Dans la pépinière *"Ets vaferah"* on fait pousser des plantes de différents types.
Une année donnée, les longueurs des tiges des plantes de cette pépinière étaient réparties selon la loi de distribution normale, et la longueur moyenne de ces tiges était de 64 cm.
Les plantes dont la longueur de la tige est inférieure à 55 cm sont vendues à des boutiques locales.
On sait que cette année-là, 32,6% des plantes de cette pépinière ont été vendues à des boutiques locales.

. Déterminez l'écart-type des longueurs des tiges cette année-là.

Les plantes dont la longueur de la tige est supérieure à 80 cm sont exportées.
Cette année-là, 9540 des plantes de cette pépinière ont été exportées.

.**(1)** Déterminez le pourcentage des plantes de cette pépinière qui ont été exportées.
(2) D'après le tableau de distribution normale, combien de plantes n'ont été ni exportées ni vendues aux boutiques locales ?

L'année suivante, les longueurs des tiges des plantes de cette pépinière étaient réparties selon la loi de distribution normale, et leur écart-type était de 25 cm.
Cette année-là également, les plantes dont la longueur de la tige était inférieure à 55 cm ont été vendues à des boutiques locales.
Cette année-là, on a fait pousser dans cette pépinière 40000 plantes en tout.
4000 de ces plantes ont été vendues à des boutiques locales.

. Déterminez la longueur moyenne des tiges des plantes cette année-là.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Soit X la variable aléatoire représentant la longueur de la tige d'une plante (en cm).

Partie : Calcul de l'écart-type σ

1. Données de la première année :
- Moyenne : $\mu = 64$
- Proportion de plantes avec $X < 55$: $P(X < 55) = 32{,}6\% = 0{,}326$

2. Détermination du score z correspondant :
- Dans la table de la loi normale centrée réduite (ou courbe de Gauss/diagramme israélien), une aire à gauche de 32,6% (0,326) correspond à un score $Z = -0{,}45$.

3. Relation de centrage-réduction :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \implies -0{,}45 = \frac{55 - 64}{\sigma}$$

$$-0{,}45 = \frac{-9}{\sigma} \implies \sigma = \frac{-9}{-0{,}45} = 20$$

Conclusion : L'écart-type des longueurs des tiges est $\sigma = 20$ **cm**.

Partie (1) : Pourcentage de plantes exportées ($X > 80$)

1. Calcul du score z pour $X = 80$:

$$Z = \frac{80 - 64}{20} = \frac{16}{20} = 0{,}8$$

2. Calcul du pourcentage correspondant :

— Dans la table de la distribution normale, la probabilité d'avoir $Z > 0{,}8$ est $P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z \leq 0{,}8) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119 = 21{,}19\%$.

Conclusion : Le pourcentage des plantes exportées est de 21,19%.

Partie (2) : Nombre de plantes ni exportées ni vendues localement

1. Calcul du nombre total de plantes cette année-là :

— Sachant que 9540 plantes représentent les 21,19% exportés :

$$\text{Nombre total de plantes} = \frac{9540}{0{,}2119} = 45000$$

2. Pourcentage de plantes ni exportées ni vendues localement :

— Plantes vendues localement : 32,6%

— Plantes exportées : 21,19%

— Pourcentage restant : $100\% - 32{,}6\% - 21{,}19\% = 46{,}21\%$

3. Calcul du nombre de plantes :

$$\text{Nombre de plantes} = 45000 \times 0{,}4621 = 20794{,}5 \approx 20795$$

Conclusion : Il y a environ 20795 **plantes** qui n'ont été ni exportées ni vendues aux boutiques locales.

Partie : Calcul de la nouvelle moyenne μ_2

1. Données de la deuxième année :

— Écart-type : $\sigma_2 = 25$

— Nombre total de plantes : $N = 40000$

— Plantes vendues localement ($X < 55$) : 4000

2. Proportion de plantes vendues localement :

$$P(X < 55) = \frac{4000}{40000} = 0{,}10 = 10\%$$

3. Détermination du score z pour une probabilité de 10% :

— D'après la table normale centrée réduite, la valeur Z correspondant à une aire accumulée à gauche de 10% (0,10) est $Z = -1{,}28$.

4. Calcul de la nouvelle moyenne μ_2 :

$$Z = \frac{X - \mu_2}{\sigma_2} \implies -1{,}28 = \frac{55 - \mu_2}{25}$$

$$-1{,}28 \times 25 = 55 - \mu_2 \implies -32 = 55 - \mu_2 \implies \mu_2 = 55 + 32 = 87$$

Conclusion : La moyenne des longueurs des tiges cette année-là est $\mu_2 = 87$ **cm**.

Énoncé de l'Exercice 2

2. Dans une société de marketing, on a étudié le lien entre les dépenses publicitaires (variable x) et les revenus (variable y) de 5 sociétés –, au cours d'un mois donné. Les données sont représentées dans le tableau suivant.

Société	**Dépenses publicitaires (en milliers de shekels) variable x**	**Revenus (en milliers de shekels) variable y**
A	10	16
B	15	17
C	20	20
D	25	34
E	30	68

.(1) Calculez la moyenne des dépenses publicitaires de ces 5 sociétés pour ce mois-là.

(2) Déterminez l'écart-type des dépenses publicitaires de ces 5 sociétés pour ce mois-là.

La société de marketing a constaté que la moyenne des revenus de ces 5 sociétés ce mois-là était de 31 mille shekels, et que l'écart-type de leurs revenus était de $8\sqrt{6}$ milliers de shekels.

. Déterminez le coefficient de corrélation r.

.(1) Déterminez l'équation de la droite de régression prédisant y en fonction de x.

(2) D'après la droite de régression, quelle est la prédiction des revenus mensuels de la société dont les dépenses publicitaires mensuelles sont de 24 mille shekels ?

Le mois suivant, les revenus de chacune des sociétés ont augmenté de 15% (les dépenses publicitaires de chacune des sociétés n'ont pas varié).

. Voici trois affirmations I–III. Déterminez pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses.

I. Le mois où les revenus ont augmenté, l'écart-type des revenus était de $10\sqrt{6}$.

II. Le mois où les revenus ont augmenté, le coefficient directeur de la droite de régression prédisant y en fonction de x n'a pas varié.

III. Le point $(20\,;35{,}65)$ se trouve sur la droite de régression prédisant y en fonction de x pour le mois où les revenus ont augmenté.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Moyenne et Écart-type de x

1. Calcul de la moyenne $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{10 + 15 + 20 + 25 + 30}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

2. Calcul de la variance s_x^2 et de l'écart-type s_x :

$$s_x^2 = \frac{(10-20)^2 + (15-20)^2 + (20-20)^2 + (25-20)^2 + (30-20)^2}{5}$$

$$s_x^2 = \frac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

$$s_x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}071$$

Conclusion :

- Moyenne des dépenses publicitaires : $\bar{x} = 20$ (milliers de shekels).
- Écart-type des dépenses publicitaires : $s_x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (milliers de shekels).

Partie : Coefficient de corrélation r

1. Calcul de la covariance $Cov(x, y)$:

$$\text{Formule : } Cov(x,y) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Données : $\bar{x} = 20$, $\bar{y} = 31$.

$$\begin{aligned}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= (10-20)(16-31) + (15-20)(17-31) + (20-20)(20-31) \\ &\quad + (25-20)(34-31) + (30-20)(68-31) \\ &= (-10)(-15) + (-5)(-14) + (0)(-11) + (5)(3) + (10)(37) \\ &= 150 + 70 + 0 + 15 + 370 = 605\end{aligned}$$

$$Cov(x,y) = \frac{605}{5} = 121$$

2. Calcul du coefficient de corrélation r :

$$r = \frac{Cov(x,y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{121}{\sqrt{50} \cdot 8\sqrt{6}} = \frac{121}{5\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{121}{40 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{121}{80\sqrt{3}} \approx 0{,}8732$$

Conclusion : Le coefficient de corrélation vaut $r = \frac{121}{80\sqrt{3}} \approx 0{,}873$.

Partie : Droite de régression et prédiction

1. Équation de la droite de régression $y = ax + b$:

— Pente (coefficient directeur) a :

$$a = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \frac{121}{50} = 2{,}42$$

— Ordonnée à l'origine b :

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 31 - 2{,}42 \times 20 = 31 - 48{,}4 = -17{,}4$$

$$\text{Équation de la droite : } y = 2{,}42x - 17{,}4$$

2. Prédiction des revenus pour $x = 24$:

$$y(24) = 2{,}42(24) - 17{,}4 = 58{,}08 - 17{,}4 = 40{,}68$$

Conclusion :

— Équation de la droite : $y = 2{,}42x - 17{,}4$.

— La prédiction des revenus pour 24 mille shekels de dépenses est de 40,68 **milliers de shekels** (40 680 shekels).

Partie : Analyse des affirmations I–III

Le mois suivant, les revenus deviennent $y' = 1{,}15y$, tandis que x ne change pas.

Affirmation I : FAUSSE

— Lorsqu'on multiplie une variable par une constante k, son écart-type est multiplié par $|k|$.

— $s_{y'} = 1{,}15 \times s_y = 1{,}15 \times 8\sqrt{6} = 9{,}2\sqrt{6} \neq 10\sqrt{6}$.

Affirmation II : FAUSSE

— La nouvelle pente a' s'exprime par : $a' = \frac{Cov(x,y')}{s_x^2} = \frac{1{,}15Cov(x,y)}{s_x^2} = 1{,}15a$.

— La nouvelle pente est $a' = 1{,}15 \times 2{,}42 = 2{,}783 \neq a$. Le coefficient directeur a donc varié.

Affirmation III : VRAIE

— La nouvelle droite de régression s'obtient en multipliant toute l'équation de la droite par 1,15 :

$$y' = 1{,}15(2{,}42x - 17{,}4) = 2{,}783x - 20{,}01$$

— Pour la moyenne $\bar{x} = 20$, la nouvelle moyenne des revenus est $\bar{y}' = 1{,}15 \times 31 = 35{,}65$.

— Vérification sur l'équation : $y'(20) = 2{,}783(20) - 20{,}01 = 55{,}66 - 20{,}01 = 35{,}65$.

— Le point $(20\,;35{,}65)$ appartient donc bien à la nouvelle droite de régression.

Énoncé de l'Exercice 3

3. Dans une exploitation agricole donnée, on cultive deux types de poivrons : des grands poivrons et des petits poivrons.
Le nombre de grands poivrons est 4 fois supérieur au nombre de petits poivrons.
On choisit au hasard un poivron parmi les poivrons de cette exploitation agricole.

. Quelle est la probabilité que le poivron choisi soit un petit poivron ?

Les grands poivrons de l'exploitation agricole sont rouges ou jaunes, et les petits poivrons sont rouges ou verts.
0,6 des grands poivrons sont rouges.
0,75 des petits poivrons sont rouges.
On choisit au hasard un poivron parmi les poivrons de cette exploitation agricole.

. Quelle est la probabilité que le poivron choisi soit un grand poivron jaune ?

.**(1)** Quelle est la probabilité que le poivron choisi soit un poivron rouge ?

(2) On sait qu'un poivron rouge a été choisi. Quelle est la probabilité que ce poivron soit un grand poivron ?

Tous les poivrons de cette exploitation agricole sont envoyés à deux centres d'emballage : et .
Tous les poivrons rouges sont envoyés au centre d'emballage , et tous les poivrons jaunes et verts sont envoyés au centre d'emballage .

. Le pourcentage de grands poivrons dans le centre d'emballage est-il supérieur ou inférieur au pourcentage de grands poivrons dans le centre d'emballage ? Justifiez votre réponse.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Probabilité de choisir un petit poivron

1. Définition des événements :
- Soit G l'événement « Le poivron est grand ».
- Soit P l'événement « Le poivron est petit ».

2. Traduction des données :
- Le nombre de grands poivrons est 4 fois supérieur au nombre de petits poivrons :

$$P(G) = 4 \cdot P(P)$$

- La somme des probabilités vaut 1 :

$$P(G) + P(P) = 1 \implies 4 \cdot P(P) + P(P) = 1 \implies 5 \cdot P(P) = 1$$

$$P(P) = \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad \text{et} \quad P(G) = 0{,}8$$

Conclusion : La probabilité que le poivron soit petit est $P(P) = 0{,}2$ (20%).

Partie : Probabilité d'avoir un grand poivron jaune

1. Analyse des probabilités conditionnelles :
- $P(\text{Rouge} \mid G) = 0{,}6 \implies P(\text{Jaune} \mid G) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
- $P(G) = 0{,}8$.

2. Calcul de la probabilité de l'intersection :

$$P(G \cap \text{Jaune}) = P(G) \times P(\text{Jaune} \mid G) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$$

Conclusion : La probabilité de choisir un grand poivron jaune est 0,32 (32%).

Partie (1) : Probabilité qu'un poivron soit rouge

1. Formule des probabilités totales :
- Un poivron rouge peut être un grand poivron rouge OU un petit poivron rouge :

$$P(\text{Rouge}) = P(G \cap \text{Rouge}) + P(P \cap \text{Rouge})$$

2. Calcul des probabilités :
- $P(G \cap \text{Rouge}) = P(G) \times P(\text{Rouge} \mid G) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$
- $P(P \cap \text{Rouge}) = P(P) \times P(\text{Rouge} \mid P) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$

$$P(\text{Rouge}) = 0{,}48 + 0{,}15 = 0{,}63$$

Conclusion : La probabilité que le poivron choisi soit rouge est 0,63 (63%).

Partie (2) : Probabilité conditionnelle $P(G \mid \textbf{Rouge})$

1. Application de la formule de Bayes :

$$P(G \mid \text{Rouge}) = \frac{P(G \cap \text{Rouge})}{P(\text{Rouge})}$$

2. Application numérique :

$$P(G \mid \text{Rouge}) = \frac{0{,}48}{0{,}63} = \frac{48}{63} = \frac{16}{21} \approx 0{,}7619$$

Conclusion : Sachant que le poivron est rouge, la probabilité qu'il soit grand est $\frac{16}{21} \approx 0{,}762$ (76,19%).

Partie : Comparaison des pourcentages de grands poivrons dans les centres et

1. Centre d'emballage (Poivrons Rouges) :

— Le pourcentage de grands poivrons dans le centre correspond à la probabilité conditionnelle calculée en **(2)** :

$$\text{Pourcentage dans } = P(G \mid \text{Rouge}) = \frac{16}{21} \approx 76{,}19\%$$

2. Centre d'emballage (Poivrons Jaunes et Verts) :

— Probabilité globale d'un poivron non-rouge (jaune ou vert) : $P(\text{Non-Rouge}) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$.

— Probabilité qu'un poivron soit à la fois grand et non-rouge (jaune) : $P(G \cap \text{Jaune}) = 0{,}32$.

— La proportion de grands poivrons dans le centre est donc :

$$P(G \mid \text{Non-Rouge}) = \frac{P(G \cap \text{Jaune})}{P(\text{Non-Rouge})} = \frac{0{,}32}{0{,}37} = \frac{32}{37} \approx 86{,}49\%$$

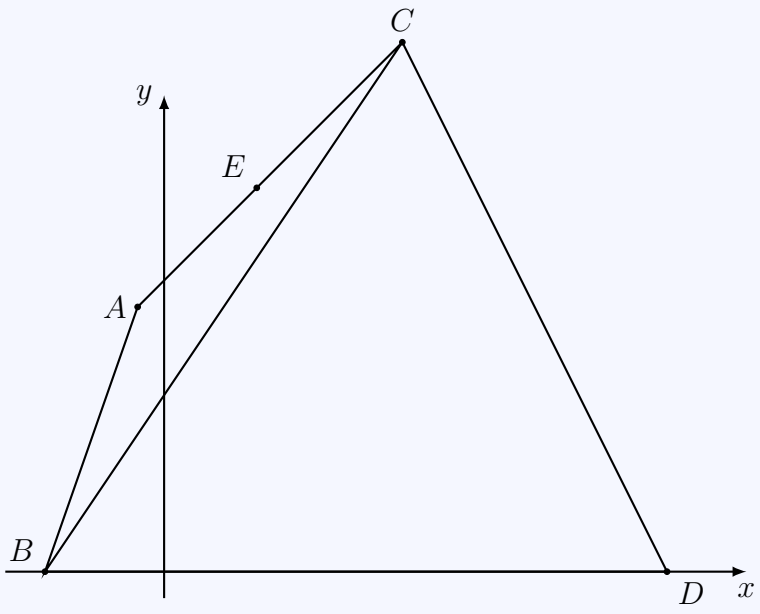
3. Comparaison :

$$76{,}19\% < 86{,}49\% \implies \frac{16}{21} < \frac{32}{37}$$

Conclusion : Le pourcentage de grands poivrons dans le centre d'emballage (76,19%) est **inférieur** au pourcentage de grands poivrons dans le centre d'emballage (86,49%).

Énoncé de l'Exercice 4

4. La figure ci-contre représente un triangle isocèle ABC $(AB = AC)$.
Le sommet B se trouve sur la partie négative de l'axe des abscisses.
Le point D se trouve sur l'axe des abscisses de sorte que CD est perpendiculaire à AC.
On sait que le point $E(4, 15)$ est le milieu du côté AC, et que l'équation de la droite CD est $y = -2x + 38$.



.**(1)** Déterminez l'équation de la droite AC.
(2) Déterminez les coordonnées du sommet C.
.**(1)** Déterminez la longueur du côté AB.
(2) Déterminez les coordonnées du sommet B.
. Déterminez la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$ et la mesure de l'angle $\widehat{CBD}$.
. Calculez l'aire du triangle ABC.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie (1) : Équation de la droite AC

1. Pente de la droite AC :

— La droite CD a pour équation $y = -2x + 38$, sa pente est $m_{CD} = -2$.

— Puisque $AC \perp CD$, le produit de leurs pentes vaut -1 :

$$m_{AC} \cdot m_{CD} = -1 \implies m_{AC} \cdot (-2) = -1 \implies m_{AC} = \frac{1}{2}$$

2. Équation de AC passant par $E(4, 15)$:

$$y - y_E = m_{AC}(x - x_E) \implies y - 15 = \frac{1}{2}(x - 4) \implies y = \frac{1}{2}x + 13$$

Conclusion : L'équation de la droite AC est $y = \frac{1}{2}x + 13$.

Partie (2) : Coordonnées du sommet C

Le point C est l'intersection des droites AC et CD :

$$\frac{1}{2}x + 13 = -2x + 38 \implies \frac{5}{2}x = 25 \implies x_C = 10$$

$$y_C = -2(10) + 38 = 18$$

Conclusion : Les coordonnées de C sont $C(10, 18)$.

Partie (1) : Longueur du côté AB

1. Coordonnées de A :

— $E(4, 15)$ est le milieu de $[AC]$ avec $C(10, 18)$:

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} \implies 4 = \frac{x_A + 10}{2} \implies x_A = -2$$

$$y_E = \frac{y_A + y_C}{2} \implies 15 = \frac{y_A + 18}{2} \implies y_A = 12 \implies A(-2, 12)$$

2. Calcul de la longueur AC :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(10 - (-2))^2 + (18 - 12)^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

3. Longueur de AB :

— Comme ABC est isocèle en A, $AB = AC = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42$.

Conclusion : La longueur du côté AB est $AB = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

Partie (2) : Coordonnées du sommet B

1. Position de B :

— B appartient à l'axe des abscisses ($y_B = 0$) et $x_B < 0$.

— La distance $AB = \sqrt{180}$ avec $A(-2, 12)$:

$$(x_B - (-2))^2 + (0 - 12)^2 = 180 \implies (x_B + 2)^2 + 144 = 180$$

$$(x_B + 2)^2 = 36 \implies x_B + 2 = -6 \quad (\text{car } x_B < 0) \implies x_B = -8$$

Conclusion : Les coordonnées de B sont $B(-8, 0)$.

Partie : Mesures des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CBD}$

1. Angle $\widehat{ABD}$:

— La droite AB passe par $B(-8, 0)$ et $A(-2, 12)$. Sa pente est $m_{AB} = \frac{12-0}{-2-(-8)} = 2$.

— L'angle d'inclinaison par rapport à l'axe des x (droite BD) est $\tan(\widehat{ABD}) = 2 \implies \widehat{ABD} = \arctan(2) \approx 63{,}43°$.

2. Angle $\widehat{CBD}$:

— La droite BC passe par $B(-8, 0)$ et $C(10, 18)$. Sa pente est $m_{BC} = \frac{18-0}{10-(-8)} = 1$.

— L'angle $\widehat{CBD}$ correspond à l'inclinaison de BC par rapport à l'axe des x : $\tan(\widehat{CBD}) = 1 \implies \widehat{CBD} = 45°$.

Conclusion : $\widehat{ABD} \approx \mathbf{63{,}43}°$ et $\widehat{CBD} = \mathbf{45}°$.

Partie : Aire du triangle ABC

1. Utilisation de la formule trigonométrique :

— L'angle $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} - \widehat{CBD} \approx 63{,}43° - 45° = 18{,}43°$.

— Dans le triangle ABC (isocèle avec $AB = AC = 6\sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{(10 - (-8))^2 + (18 - 0)^2} = \sqrt{18^2 + 18^2} = 18\sqrt{2}$) :

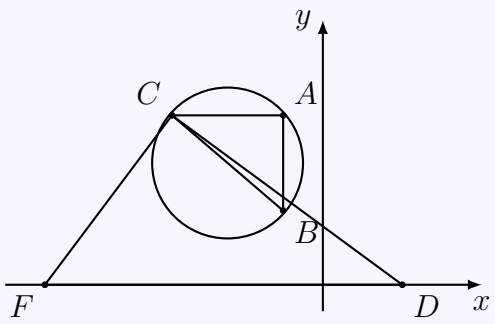
$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC})$$

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot (6\sqrt{5}) \cdot (18\sqrt{2}) \cdot \sin(18{,}43°) = 54\sqrt{10} \cdot 0{,}3162 = 54$$

Conclusion : L'aire du triangle ABC est de 54 **unités d'aire**.

Énoncé de l'Exercice 5

5. La figure ci-contre représente un triangle ABC inscrit dans un cercle
Le côté CB est un diamètre du cercle
Le côté AB est parallèle à l'axe des ordonnées
Le prolongement du côté CB coupe l'axe des abscisses en un point D
On trace une tangente au cercle passant par le point C, qui coupe l'axe des abscisses en un point F



.**(1)** Expliquez pourquoi le côté AC est parallèle à l'axe des abscisses
(2) Démontrez que $\Delta ABC \sim \Delta CFD$

On sait que $D(8,0)$[cite : 14], et que l'équation de la tangente CF est $y = \frac{4}{3}x + 31$

. Déterminez la longueur du côté FD

.**(1)** Déterminez l'équation du côté CD[cite : 14].
(2) Déterminez la longueur du côté CD[cite : 14].

. On sait que le rapport de similitude entre le triangle ABC et le triangle CFD vaut $\frac{8}{25}$
Calculez le périmètre du triangle ABC

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie (1) : Parallélisme de AC avec l'axe des abscisses

1. Propriété de l'angle inscrit :
- Le côté $[CB]$ est un diamètre du cercle[cite : 14], donc le triangle ABC inscrit dans le cercle est un triangle rectangle en A ($\widehat{BAC} = 90°$).
- Par conséquent, $AC \perp AB$.

2. Parallélisme :
- Le côté AB est parallèle à l'axe des ordonnées ($AB \parallel Oy$)[cite : 14].
- Puisque AC est perpendiculaire à AB, AC est nécessairement perpendiculaire à l'axe des ordonnées, et donc AC **est parallèle à l'axe des abscisses** ($AC \parallel Ox$).

Partie (2) : Démonstration de la similitude $\Delta ABC \sim \Delta CFD$

1. Égalité du premier angle (90°) :
- L'angle $\widehat{BAC} = 90°$ (angle inscrit interceptant un diamètre)[cite : 14].
- La droite CF est la tangente au cercle au point C[cite : 14] et CB est le diamètre, donc le rayon/diamètre est perpendiculaire à la tangente au point de contact : $FC \perp CD \implies \widehat{FCD} = 90°$.
- Ainsi, $\widehat{BAC} = \widehat{FCD} = 90°$.

2. Égalité du deuxième angle :
- Comme $AC \parallel FD$ (car FD repose sur l'axe des abscisses et $AC \parallel Ox$), les angles alternes-internes formés avec la sécante (CD) sont égaux :

$$\widehat{ACB} = \widehat{FDC}$$

3. Conclusion par le critère Angle-Angle (AA) :
- Ayant deux angles égaux ($\widehat{BAC} = \widehat{FCD}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{FDC}$), les triangles sont semblables :

$$\mathbf{\Delta ABC \sim \Delta CFD}$$

Partie : Longueur du côté FD

1. Coordonnées de F :
- Le point F est l'intersection de la tangente CF avec l'axe des abscisses ($y = 0$)[cite : 14] :

$$0 = \frac{4}{3}x + 31 \implies \frac{4}{3}x = -31 \implies x_F = -\frac{93}{4} = -23{,}25 \implies F(-23{,}25\,;0)$$

2. Calcul de la distance FD :
- Sachant que $D(8,0)$[cite : 14], les points F et D sont situés sur l'axe des x :

$$FD = x_D - x_F = 8 - (-23{,}25) = 31{,}25$$

Conclusion : La longueur du côté FD est $FD = 31{,}25$.

Partie (1) : Équation du côté CD

1. Pente de la droite CD :

— La tangente CF a pour pente $m_{CF} = \frac{4}{3}$[cite : 14].

— Puisque $CD \perp CF$, le produit de leurs pentes est -1 :

$$m_{CD} \cdot \frac{4}{3} = -1 \implies m_{CD} = -\frac{3}{4}$$

2. Équation de CD passant par $D(8,0)$:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 8) \implies y = -\frac{3}{4}x + 6$$

Conclusion : L'équation de la droite CD est $y = -\frac{3}{4}x + 6$.

Partie (2) : Longueur du côté CD

1. Coordonnées du sommet C :

— C est l'intersection des droites CF et CD :

$$\frac{4}{3}x + 31 = -\frac{3}{4}x + 6 \implies \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)x = 6 - 31$$

$$\frac{25}{12}x = -25 \implies x_C = -12$$

$$y_C = -\frac{3}{4}(-12) + 6 = 9 + 6 = 15 \implies C(-12\,;15)$$

2. Calcul de la distance CD avec $D(8,0)$:

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(8 - (-12))^2 + (0 - 15)^2} = \sqrt{20^2 + (-15)^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625}$$

Conclusion : La longueur du côté CD est $CD = 25$.

Partie : Périmètre du triangle ABC

1. Calcul des côtés du triangle CFD :

— Le triangle CFD est rectangle en C

— On connaît l'hypoténuse $FD = 31{,}25$ et le côté $CD = 25$.

— D'après le théorème de Pythagore :

$$FC = \sqrt{FD^2 - CD^2} = \sqrt{31{,}25^2 - 25^2} = \sqrt{976{,}5625 - 625} = \sqrt{351{,}5625} = 18{,}75$$

2. Périmètre de ΔCFD :

$$\text{Périmètre}(\Delta CFD) = FD + CD + FC = 31{,}25 + 25 + 18{,}75 = 75$$

3. Calcul du périmètre de ΔABC :

— Le rapport de similitude entre ΔABC et ΔCFD est $k = \frac{8}{25}$.

— Le rapport des périmètres est égal au rapport de similitude k :

$$\text{Périmètre}(\Delta ABC) = k \times \text{Périmètre}(\Delta CFD) = \frac{8}{25} \times 75 = 8 \times 3 = 24$$

Conclusion : Le périmètre du triangle ABC est égal à 24.

Énoncé de l'Exercice 6

6. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{72 - 18x}{x^2 + 9} - 1$, définie pour tout x.

. Déterminez l'équation de l'asymptote de la fonction $f(x)$ qui est parallèle à l'axe des abscisses.

. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.

.**(1)** Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

(2) Indiquez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.

. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = |f(x)|$, définie pour tout x.

.**(1)** Déterminez l'équation de l'asymptote de la fonction $g(x)$ qui est parallèle à l'axe des abscisses.

(2) Déterminez lequel des graphes I–IV ci-dessous représente le graphe de la fonction $g(x)$. Justifiez votre réponse.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Asymptote horizontale de $f(x)$

Pour trouver l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ($x \to \pm\infty$) :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{72-18x}{x^2+9} - 1\right) = 0 - 1 = -1$$

Conclusion : L'équation de l'asymptote horizontale est $y = -1$.

Partie : Intersection avec les axes

1. Intersection avec l'axe des ordonnées (y-intercept, $x = 0$) :

$$f(0) = \frac{72-0}{0+9} - 1 = \frac{72}{9} - 1 = 8 - 1 = 7 \implies (0, 7)$$

2. Intersection avec l'axe des abscisses (x-intercept, $f(x) = 0$) :

$$\frac{72-18x}{x^2+9} - 1 = 0 \implies \frac{72-18x}{x^2+9} = 1 \implies 72 - 18x = x^2 + 9$$

$$x^2 + 18x - 63 = 0$$

$$(x+21)(x-3) = 0 \implies x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -21$$

Conclusion : Les points d'intersection sont $(0, 7)$, $(3, 0)$ et $(-21, 0)$.

Partie (1) : Points d'extremum de $f(x)$

1. Calcul de la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-18(x^2+9) - (72-18x)(2x)}{(x^2+9)^2} = \frac{-18x^2 - 162 - 144x + 36x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{18x^2 - 144x - 162}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{18(x^2 - 8x - 9)}{(x^2+9)^2} = \frac{18(x-9)(x+1)}{(x^2+9)^2}$$

2. Annulation de la dérivée :

$$f'(x) = 0 \implies (x-9)(x+1) = 0 \implies x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 9$$

3. Calcul des ordonnées correspondant aux points critiques :

- Pour $x = -1$: $f(-1) = \frac{72-18(-1)}{(-1)^2+9} - 1 = \frac{90}{10} - 1 = 8 \implies (\mathbf{-1}, \mathbf{8})$ (Maximum).
- Pour $x = 9$: $f(9) = \frac{72-18(9)}{9^2+9} - 1 = \frac{72-162}{90} - 1 = -1 - 1 = -2 \implies (\mathbf{9}, \mathbf{-2})$ (Minimum).

Conclusion :

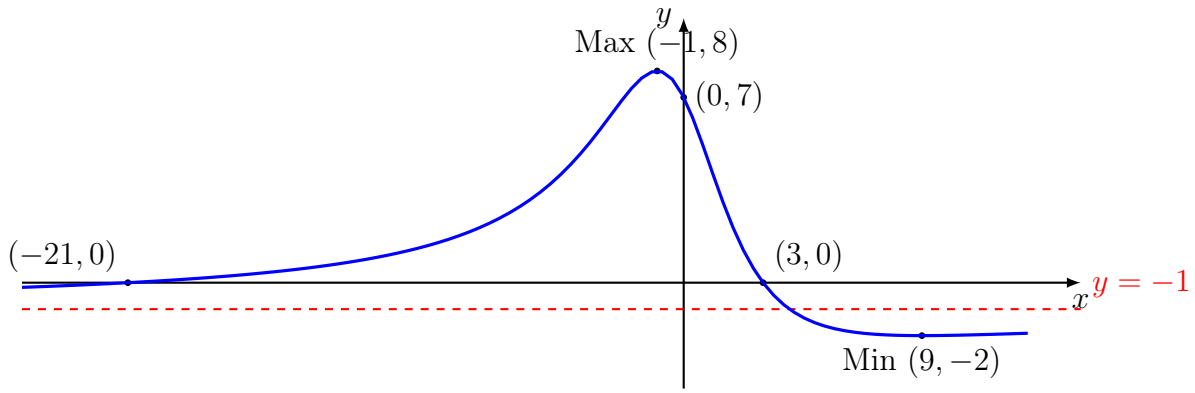
- Point Maximum : $(-1, 8)$.
- Point Minimum : $(9, -2)$.

Partie (2) : Intervalles de croissance et de décroissance

En étudiant le signe de $f'(x) = \frac{18(x-9)(x+1)}{(x^2+9)^2}$:

- **Croissance ($f'(x) > 0$) :** $x < -1$ ou $x > 9$.
- **Décroissance ($f'(x) < 0$) :** $-1 < x < 9$.

Partie : Esquisse du graphe de $f(x)$



Partie : Étude de $g(x) = |f(x)|$

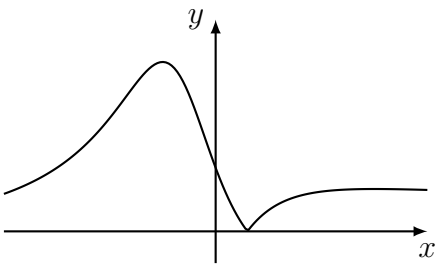
1. Asymptote horizontale de $g(x)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = |-1| = 1$$

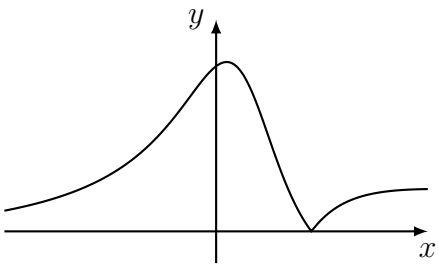
L'asymptote horizontale de $g(x)$ est $y = 1$.

2. Choix du graphe :

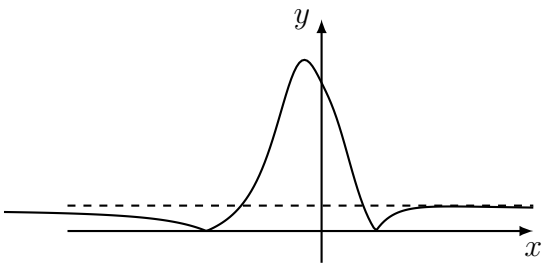
- Le graphe de $g(x) = |f(x)|$ s'obtient en effectuant une symétrie axiale par rapport à l'axe des x pour toutes les parties où $f(x) < 0$ (notamment pour $x < -21$ et $3 < x < 21$).
- L'asymptote horizontale devient $y = 1$.
- Le minimum $(-2, 9)$ devient un maximum local en $(9, 2)$, et les intersections avec l'axe des x en $x = -21$ et $x = 3$ deviennent des minima anguleux ($g(x) = 0$).



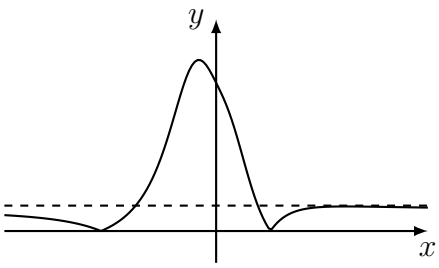
II



I



IV



III

Énoncé de l'Exercice 7

7. Soit la fonction $f(x) = (a - x) \cdot \sqrt{3x - 6}$.
a est un paramètre.

. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

On sait que le point $(5, 9)$ se situe sur le graphe de la fonction $f(x)$.

. Déterminez la valeur de a.

Substituez $a = 8$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux articles **-**.

. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

. Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

La fonction dérivée $f'(x)$ est définie sur l'intervalle $x > 2$.

.**(1)** Déterminez lequel des graphes I–IV figurant à la fin de la question représente la fonction dérivée $f'(x)$. Justifiez votre réponse.

(2) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction dérivée $f'(x)$, par l'axe des abscisses et par la droite $x = 20$.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Domaine de définition

L'expression sous la racine carrée doit être supérieure ou égale à zéro :

$$3x - 6 \geq 0 \implies 3x \geq 6 \implies x \geq 2$$

Conclusion : Le domaine de définition est $x \geq 2$.

Partie : Calcul du paramètre a

Le point $(5, 9)$ appartient au graphe de la fonction, donc $f(5) = 9$:

$$f(5) = (a-5) \cdot \sqrt{3(5) - 6} = 9$$

$$(a-5) \cdot \sqrt{15 - 6} = 9 \implies (a-5) \cdot \sqrt{9} = 9$$

$$3(a-5) = 9 \implies a - 5 = 3 \implies a = 8$$

Conclusion : La valeur du paramètre est $a = 8$.

Partie : Intersections avec l'axe des abscisses

Pour $a = 8$, la fonction s'écrit $f(x) = (8-x)\sqrt{3x-6}$.
Résolvons $f(x) = 0$ sur $x \geq 2$:

$$(8-x)\sqrt{3x-6} = 0 \implies 8 - x = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{3x-6} = 0$$

$$x = 8 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Conclusion : Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(2, 0)$ et $(8, 0)$.

Partie : Points d'extremum de $f(x)$

1. Calcul de la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = (-1) \cdot \sqrt{3x-6} + (8-x) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x-6}} = \frac{-2(3x-6) + 3(8-x)}{2\sqrt{3x-6}}$$

$$f'(x) = \frac{-6x + 12 + 24 - 3x}{2\sqrt{3x-6}} = \frac{36 - 9x}{2\sqrt{3x-6}} = \frac{9(4-x)}{2\sqrt{3x-6}}$$

2. Point critique intérieur :

$$f'(x) = 0 \implies 36 - 9x = 0 \implies x = 4$$

$$f(4) = (8-4)\sqrt{3(4)-6} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}80$$

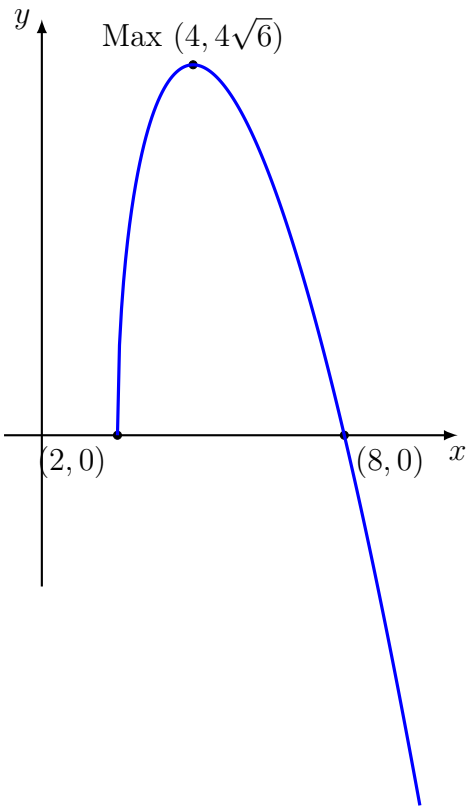
3. Étude du signe de $f'(x)$:

- Pour $2 < x < 4$: $f'(x) > 0 \implies f$ est croissante.
- Pour $x > 4$: $f'(x) < 0 \implies f$ est décroissante.
- Le point en bord de domaine $x = 2$ est un minimum absolu.

Conclusion :

- Maximum local/absolu : $(4, 4\sqrt{6})$.
- Minimum au bord du domaine : $(2, 0)$.

Partie : Esquisse du graphe de $f(x)$



Partie : Étude de la fonction dérivée $f'(x)$

1. Analyse pour l'article (1) :

- Pour $2 < x < 4$, $f'(x) > 0$ (au-dessus de l'axe des x).
- En $x = 4$, $f'(4) = 0$ (intersecte l'axe des x).
- Pour $x > 4$, $f'(x) < 0$ (en dessous de l'axe des x).
- Lorsque $x \to 2^+$, $f'(x) \to +\infty$ (asymptote verticale en $x = 2$).

Le graphe qui satisfait toutes ces conditions (positif sur $]2, 4[$, annulation en $x = 4$, négatif sur $]4, +\infty[$ avec une asymptote en $x = 2$) est le graphe correspondant à $f'(x)$.

2. Calcul d'aire pour l'article (2) :

- On cherche l'aire délimitée par $f'(x)$, l'axe des x et $x = 20$.
- Sur l'intervalle $[4, 20]$, la fonction $f'(x)$ est négative ($f'(x) \leq 0$).
- L'aire est donnée par l'intégrale définie :

$$S = \int_4^{20} -f'(x)\,\mathrm{d}x = -\Big[f(x)\Big]_4^{20} = f(4) - f(20)$$

- Calcul des valeurs :

$$f(4) = 4\sqrt{6}$$

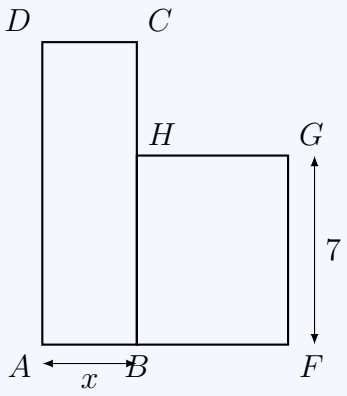
$$f(20) = (8 - 20)\sqrt{3(20) - 6} = -12\sqrt{54} = -12 \cdot 3\sqrt{6} = -36\sqrt{6}$$

$$S = 4\sqrt{6} - (-36\sqrt{6}) = 40\sqrt{6} \approx 97{,}98$$

Conclusion : L'aire délimitée est de $40\sqrt{6}$ unités d'aire (soit environ 97,98).

Énoncé de l'Exercice 8

8. La figure ci-contre représente un jardin public divisé en deux zones : une zone $ABCD$ comportant une pelouse, et une zone $BFGH$ comportant des jeux pour enfants[cite : 14].
Chacune de ces zones est en forme de rectangle[cite : 14].
On note x la longueur du côté AB[cite : 14].
On sait que la longueur du côté GF vaut 7 mètres, et que la longueur du côté BF est supérieure de 2 mètres à la longueur du côté AB[cite : 14].
On a entouré la zone $ABCD$ d'une clôture d'une longueur de 32 mètres[cite : 14].



.**(1)** Exprimez la longueur du côté AD en fonction de x[cite : 14].

(2) Exprimez l'aire de la zone $ABCD$ en fonction de x[cite : 14].

. Exprimez le rapport entre l'aire de la zone $ABCD$ et l'aire de la zone $BFGH$, en fonction de x[cite : 14].

. Déterminez la valeur de x pour laquelle le rapport entre l'aire de la zone $ABCD$ et l'aire de la zone $BFGH$ est maximal[cite : 14].

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie (1) : Expression du côté AD en fonction de x

1. Formule du périmètre du rectangle $ABCD$:
— La clôture entoure le rectangle $ABCD$[cite : 14] :

$$\text{Périmètre}(ABCD) = 2 \cdot (AB + AD) = 32$$

$$AB + AD = 16$$

2. Expression de AD :
— Sachant que $AB = x$[cite : 14] :

$$x + AD = 16 \implies AD = 16 - x$$

Conclusion : La longueur du côté AD en fonction de x est $AD = 16 - x$.

Partie (2) : Expression de l'aire de la zone $ABCD$

1. Calcul de l'aire du rectangle $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = x \cdot (16 - x) = 16x - x^2$$

Conclusion : L'aire de la zone $ABCD$ est $S_{ABCD}(x) = 16x - x^2$.

Partie : Expression du rapport des aires

1. Dimensions et aire de la zone $BFGH$:
— La longueur $GF = 7$ mètres[cite : 14].
— La longueur $BF = AB + 2 = x + 2$[cite : 14].
— L'aire du rectangle $BFGH$ est donc :

$$S_{BFGH} = BF \cdot GF = 7(x + 2) = 7x + 14$$

2. Expression du rapport $R(x)$:

$$R(x) = \frac{S_{ABCD}}{S_{BFGH}} = \frac{16x - x^2}{7x + 14}$$

Conclusion : Le rapport des aires est $R(x) = \dfrac{16x - x^2}{7x + 14}$.

Partie : Recherche de la valeur de x qui me permet de maximiser le rapport

1. Domaine de définition physique de x :
— $AB = x > 0$[cite : 14] et $AD = 16 - x > 0 \implies 0 < x < 16$.

2. Calcul de la dérivée $R'(x)$:

$$R'(x) = \frac{(16-2x)(7x+14) - (16x-x^2)(7)}{(7x+14)^2}$$

$$R'(x) = \frac{(112x + 224 - 14x^2 - 28x) - (112x - 7x^2)}{(7x+14)^2}$$

$$R'(x) = \frac{-7x^2 - 28x + 224}{(7x+14)^2} = \frac{-7(x^2+4x-32)}{(7x+14)^2}$$

3. Annulation de la dérivée :

$$R'(x) = 0 \implies x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$(x+8)(x-4) = 0 \implies x = 4 \quad (\text{car } x > 0)$$

4. Vérification de la nature du point extremum :
— Pour $0 < x < 4$: $R'(x) > 0 \implies R(x)$ est croissante.
— Pour $4 < x < 16$: $R'(x) < 0 \implies R(x)$ est décroissante.
— Donc $x = 4$ correspond bien à un **maximum**.
Conclusion : Le rapport entre les deux zones est maximal pour $x = 4$ **mètres**.