Exercice 1

Dans un pays donné, une étude nationale a été menée dans le domaine de la santé.
Dans cette étude, le nombre de pas quotidiens de chaque participant a été examiné.
Il a été constaté que le nombre de pas quotidiens suit une loi normale, avec un écart-type de $\sigma_1 = 800$.
Il a été constaté que 37,5% des participants à l'étude marchent moins de 6 944 pas par jour.

a. Trouvez le nombre moyen de pas quotidiens des participants à l'étude.

Le ministère de la Santé recommande de marcher plus de 8 400 pas par jour.

b. Trouvez le pourcentage de participants à l'étude qui respectent cette recommandation.

Il a été constaté que 14 722 participants à l'étude marchent plus de 7 200 pas par jour et moins de 8 400 pas par jour.

c. D'après la table de la loi normale, combien de personnes au total ont participé à l'étude ?

Dans l'étude, le nombre d'heures de sommeil par 24 heures de chaque participant a également été examiné.
Il a été constaté que le nombre d'heures de sommeil par 24 heures suit aussi une loi normale, de moyenne $\mu_2 = 7$ heures.
Sarit a participé à l'étude. Son nombre d'heures de sommeil par 24 heures est de 9,28, et son nombre de pas quotidiens est de 8 416.
La note centrée réduite (score z) de Sarit pour le nombre de pas quotidiens est égale à sa note centrée réduite pour le nombre d'heures de sommeil par 24 heures.

d. Trouvez l'écart-type σ_2 du nombre d'heures de sommeil par 24 heures des participants à l'étude.

Correction Détaillée

a.

Identification des données :

- L'écart-type du nombre de pas est $\sigma = 800$.
- La proportion de participants effectuant moins de 6 944 pas par jour est de 37,5%, soit une probabilité de 0,375.

Passage à la variable centrée réduite (Z) :

- Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pas. On cherche la valeur z telle que $P(Z < z) = 0{,}375$.
- En consultant la table de la loi normale centrée réduite, la valeur correspondant à une probabilité cumulée de 0,375 est $z = -0{,}32$.

Calcul de la moyenne (m_1) :

— On utilise la formule : $z = \dfrac{X - m}{\sigma}$

— On remplace par les valeurs connues :

$$-0{,}32 = \frac{6\,944 - m}{800}$$

$$-256 = 6\,944 - m \implies m = 6\,944 + 256 = 7\,200$$

Conclusion : Le nombre moyen de pas quotidiens est de 7 200 **pas**.

b : Pourcentage de participants respectant la recommandation

1. Identification du seuil :

— La recommandation est de marcher plus de 8 400 pas par jour ($X > 8\,400$).

2. Calcul du score centré réduit (z) :

$$z = \frac{8\,400 - 7\,200}{800} = \frac{1\,200}{800} = 1{,}5$$

3. Calcul de la probabilité :

— On cherche $P(X > 8\,400) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5)$.

— D'après la table de la loi normale : $P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$.

— D'où $P(Z > 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$.

Conclusion : 6,68% des participants respectent la recommandation.

Partie c : Calcul du nombre total de participants (N)

1. Détermination des limites en scores z :

— Pour la limite inférieure $X_1 = 7\,200$ (la moyenne) : $z_1 = 0$.

— Pour la limite supérieure $X_2 = 8\,400$: $z_2 = 1{,}5$.

2. Calcul de la proportion dans cet intervalle :

$$P(0 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < 0) = 0{,}9332 - 0{,}5 = 0{,}4332$$

Cela signifie que 43,32% des participants se trouvent dans cet intervalle.

3. Calcul de l'effectif total (N) :

$$0{,}4332 \times N = 14\,722 \implies N = \frac{14\,722}{0{,}4332} = 34\,000$$

Conclusion : Au total, 34 000 **personnes** ont participé à l'étude.

Partie d : Calcul de l'écart-type du nombre d'heures de sommeil (σ_2)

1. Calcul du score z de Sarit pour les pas :

$$z_{\text{pas}} = \frac{8\,416 - 7\,200}{800} = \frac{1\,216}{800} = 1{,}52$$

2. Égalité des scores centrés réduits :

— L'énoncé indique que $z_{\text{sommeil}} = z_{\text{pas}} = 1{,}52$.

3. Calcul de l'écart-type (σ_2) :

— Avec $\mu_2 = 7$ et la valeur de Sarit $Y = 9{,}28$:

$$1{,}52 = \frac{9{,}28 - 7}{\sigma_2} \implies 1{,}52 = \frac{2{,}28}{\sigma_2}$$

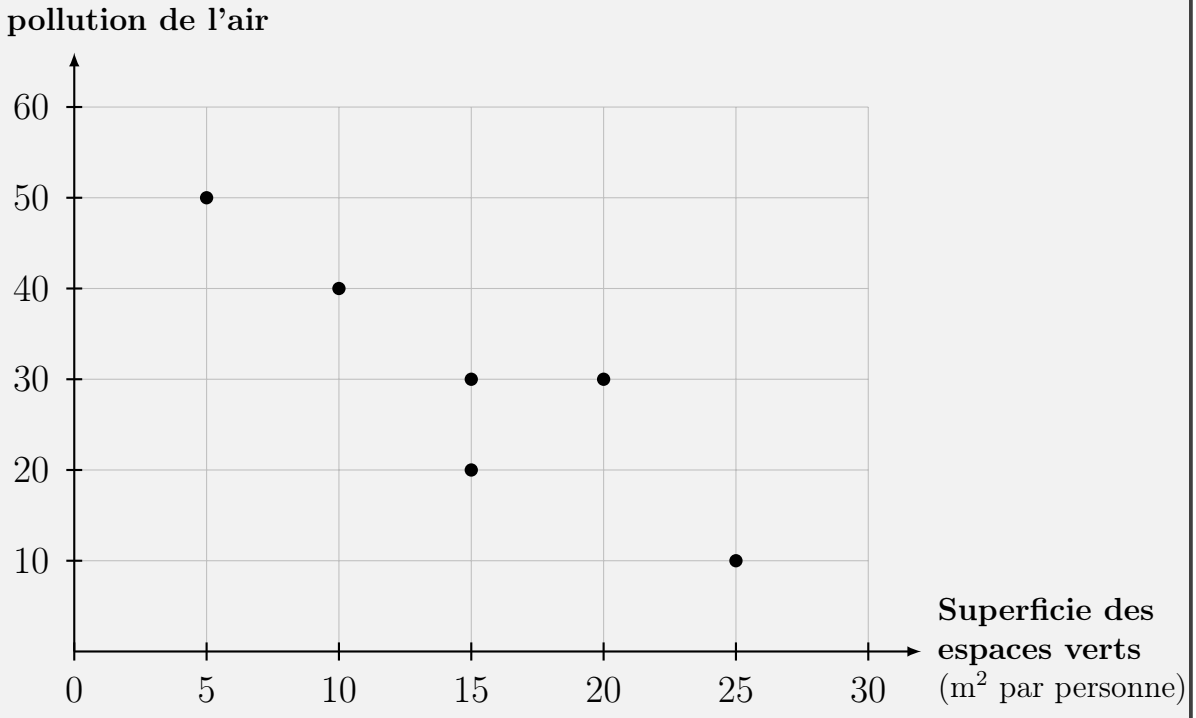
— On isole σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{2{,}28}{1{,}52} = 1{,}5$$

Conclusion : L'écart-type du nombre d'heures de sommeil est de 1,5 **heure**.

Énoncé de l'Exercice

2. Un chercheur en environnement a examiné dans 6 villes différentes la relation entre la superficie des espaces verts (parcs et jardins publics) par personne dans la ville (variable x) et le taux de pollution de l'air dans la ville (variable y).
Le chercheur a déterminé le taux de pollution de l'air pour chaque ville selon l'indice de qualité de l'air IQA (Indice numérique de la Quantité de polluants dans l'Air).
Les données sont présentées dans le diagramme de dispersion ci-dessous.



On note r le coefficient de corrélation entre x et y.

. Voici quatre affirmations I–IV. Déterminez quelle affirmation est vraie. Justifiez votre réponse.

I. $0 < r < 1$
II. $r = -1$
III. $-1 < r < 0$
IV. On ne peut pas déterminer l'intervalle des valeurs de r.

. **(1)** Calculez la moyenne de la superficie des espaces verts par personne dans les 6 villes.
(2) Calculez la moyenne du taux de pollution de l'air dans les 6 villes.

Énoncé de l'Exercice (Suite)

On sait que l'équation de la droite de régression prédisant y en fonction de x est $y = -1{,}8x + b$.

- **(1)** Déterminez la valeur de b.
- **(2)** D'après la droite de régression, quelle est la prédiction du taux de pollution de l'air dans une ville dans laquelle la superficie des espaces verts est de 18 m^2 par personne ?

- Calculez l'écart-type de la superficie des espaces verts dans les 6 villes.

Le chercheur a déterminé que l'écart-type du taux de pollution dans l'air est de $S_y = \sqrt{\frac{500}{3}}$.

- À l'aide de l'équation de la droite de régression prédisant y en fonction de x, déterminez le coefficient de corrélation r.

Le chercheur a découvert que l'instrument de mesure était défaillant et qu'en réalité, le taux de pollution de l'air dans chacune des 6 villes était supérieur de 4 au taux de pollution de l'air qui avait été mesuré précédemment. Le chercheur a corrigé les données correspondantes.

- **(1)** Le coefficient directeur de la droite de régression prédisant y en fonction de x après la correction des données du taux de pollution de l'air, a-t-il augmenté, diminué ou n'a-t-il pas varié ? Justifiez votre réponse.
- **(2)** Écrivez l'équation de la droite de régression prédisant y en fonction de x après la correction des données du taux de pollution de l'air.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Correction Détaillée — Exercice 2

Statistiques et Corrélation

Relevé préalable des données du graphique

En observant attentivement le diagramme de dispersion, on lit les coordonnées (x, y) des 6 villes :

— Ville 1 : $(5, 50)$

— Ville 2 : $(10, 40)$

— Ville 3 : $(15, 30)$

— Ville 4 : $(15, 20)$

— Ville 5 : $(20, 30)$

— Ville 6 : $(25, 10)$

Partie : Détermination de l'affirmation vraie pour r

1. Analyse de la tendance du nuage de points :

— On constate globalement que lorsque la superficie des espaces verts (x) augmente, le taux de pollution de l'air (y) a tendance à diminuer.

— La relation entre x et y est donc inversement proportionnelle (tendance négative). Par conséquent, le coefficient de corrélation r est strictement négatif : $r < 0$.

2. Vérification de l'alignement des points :

— Pour que le coefficient de corrélation soit égal à -1 ($r = -1$), il faudrait que tous les points soient **parfaitement alignés** sur une même droite descendante.

— Or, on remarque par exemple que pour $x = 15$, il existe deux valeurs différentes de y (20 et 30). De même, pour $x = 20$, $y = 30$, ce qui casse l'alignement parfait.

— Les points ne sont donc pas tous alignés, ce qui implique que : $r \neq -1$.

3. Conclusion :

— Puisque r est strictement négatif ($r < 0$) et non égal à -1 ($r \neq -1$), la valeur de r est comprise strictement entre -1 et 0.

— **L'affirmation vraie est donc la III : $-1 < r < 0$.**

Partie (1) : Calcul de la moyenne de la superficie des espaces verts ($\bar{x}$)

1. Calcul de la somme des valeurs de x :

$$\sum x = 5 + 10 + 15 + 15 + 20 + 25 = 90$$

2. Application de la formule de la moyenne :

— Le nombre total de villes est $N = 6$.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{90}{6} = 15$$

Conclusion : La moyenne de la superficie des espaces verts par personne dans les 6 villes est de 15 **m^2 par personne**.

Partie (2) : Calcul de la moyenne du taux de pollution de l'air ($\bar{y}$)

1. Calcul de la somme des valeurs de y :

$$\sum y = 50 + 40 + 30 + 20 + 30 + 10 = 180$$

2. Application de la formule de la moyenne :

— Le nombre total de villes est $N = 6$.

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{180}{6} = 30$$

Conclusion : La moyenne du taux de pollution de l'air dans les 6 villes est de 30.

Correction Détaillée — Exercice 2 (Suite)

Régression Linéaire et Corrélation

Rappel des données de la première partie

Les $N = 6$ villes ont pour données :

— Moyenne de x : $\bar{x} = 15$

— Moyenne de y : $\bar{y} = 30$

— Valeurs de x : $5, 10, 15, 15, 20, 25$

Partie (1) : Détermination de la valeur de b

1. Propriété de la droite de régression :

— La droite de régression passe obligatoirement par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y}) = (15, 30)$.

2. Injection des coordonnées dans l'équation :

— L'équation donnée est $y = -1{,}8x + b$.

— En remplaçant x par 15 et y par 30 :

$$30 = -1{,}8(15) + b$$

$$30 = -27 + b \implies b = 30 + 27 = 57$$

Conclusion : La valeur de b est 57. L'équation de la droite est $y = -1{,}8x + 57$.

Partie (2) : Prédiction du taux de pollution pour $x = 18$

1. Application de l'équation de régression :

— On remplace x par 18 dans l'équation $y = -1{,}8x + 57$:

$$y = -1{,}8(18) + 57$$

$$y = -32{,}4 + 57 = 24{,}6$$

Conclusion : La prédiction du taux de pollution de l'air est de 24,6.

Partie : Calcul de l'écart-type de la superficie des espaces verts (S_x)

1. Calcul de la somme des carrés des valeurs de x :

$$\sum x^2 = 5^2 + 10^2 + 15^2 + 15^2 + 20^2 + 25^2 = 25 + 100 + 225 + 225 + 400 + 625 = 1600$$

2. Calcul de la variance (S_x^2) :

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{1600}{6} - 15^2 = \frac{800}{3} - 225 = \frac{125}{3}$$

3. Calcul de l'écart-type (S_x) :

$$S_x = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{15}}{3} \approx 6{,}455$$

Conclusion : L'écart-type de la superficie des espaces verts est $S_x = \sqrt{\frac{125}{3}} \approx 6{,}455$.

Partie : Détermination du coefficient de corrélation r

1. Formule du coefficient directeur a :

— Le coefficient directeur de la droite de régression réponds à la formule : $a = r \cdot \dfrac{S_y}{S_x}$.

2. Injection des valeurs connues :

— On sait que $a = -1{,}8$, $S_y = \sqrt{\dfrac{500}{3}}$ et $S_x = \sqrt{\dfrac{125}{3}}$.

$$-1{,}8 = r \cdot \frac{\sqrt{\frac{500}{3}}}{\sqrt{\frac{125}{3}}}$$

3. Simplification et calcul :

— Le rapport des écarts-types simplifie les racines :

$$\frac{S_y}{S_x} = \sqrt{\frac{500/3}{125/3}} = \sqrt{\frac{500}{125}} = \sqrt{4} = 2$$

— L'équation devient alors :

$$-1{,}8 = 2r \implies r = \frac{-1{,}8}{2} = -0{,}9$$

Conclusion : Le coefficient de corrélation r est de $-0{,}9$.

Partie (1) : Effet de la correction sur le coefficient directeur

1. Analyse de la modification :

— La correction consiste à ajouter la valeur constante 4 à chaque donnée y ($y_{\text{nouveau}} = y + 4$).

2. Impact sur la covariance et la variance :

— Ajouter une constante à toutes les valeurs d'une variable décale l'ensemble du nuage de points verticalement, mais ne modifie ni l'écartement des points par rapport à la moyenne, ni la covariance entre x et y.

— Par conséquent, $\text{Cov}(x, y_{\text{nouveau}}) = \text{Cov}(x, y)$ et la variance S_x^2 reste identique.

Conclusion : Le coefficient directeur $a = \dfrac{\text{Cov}(x, y)}{S_x^2}$ **n'a pas varié** ($a = -1{,}8$).

Partie (2) : Équation de la nouvelle droite de régression

1. Nouvelle moyenne de y :

$$\bar{y}_{\text{nouveau}} = \bar{y} + 4 = 30 + 4 = 34$$

2. Calcul de la nouvelle ordonnée à l'origine (b_{nouveau}) :

— On sait que $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

$$b_{\text{nouveau}} = 34 - (-1{,}8 \times 15) = 34 + 27 = 61$$

— *(Remarque : cela revient simplement à ajouter 4 à l'ancienne ordonnée à l'origine : 57+4 = 61.)*

Conclusion : La nouvelle équation de la droite de régression est $y = -1{,}8x + 61$.

Énoncé et Correction Détaillée

Probabilités et Arbre de Choix — Méthode Structurée

Énoncé de l'Exercice 3

3. Dans une usine, on produit des ordinateurs.
Tous les ordinateurs produits lors d'un certain cycle de production ont été soumis à deux tests de contrôle qualité pour s'assurer qu'ils étaient en bon état.
Au premier test, on a constaté que 80% des ordinateurs étaient en bon état.
Si un ordinateur est jugé en bon état au premier test, la probabilité qu'il soit jugé en bon état au second test est de 0,9.
Si un ordinateur n'est pas jugé en bon état au premier test, la probabilité qu'il soit jugé en bon état au second test est de 0,35.
On a choisi au hasard un ordinateur produit lors de ce cycle de production.

. Quelle est la probabilité que l'ordinateur soit jugé en bon état à exactement un des tests ?

. Quelle est la probabilité que l'ordinateur soit jugé en bon état à au moins un des tests ?

Seuls les ordinateurs qui ont été jugés en bon état sont mis en vente.
On a choisi au hasard un ordinateur produit lors de ce cycle de production.

. On sait que l'ordinateur choisi a été jugé en bon état à au moins un des tests. Quelle est la probabilité que cet ordinateur ait été mis en vente ?

On sait que 250 ordinateurs ont été produits lors de ce cycle de production.

. Déterminez le nombre d'ordinateurs qui ont été mis en vente au cours de ce cycle de production.

Parmi les ordinateurs qui ont été produits lors de ce cycle de production, on a choisi au hasard deux ordinateurs l'un après l'autre (tirage sans remise).

. Quelle est la probabilité qu'exactement un ordinateur ait été mis en vente ?

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Correction Détaillée — Exercice 3

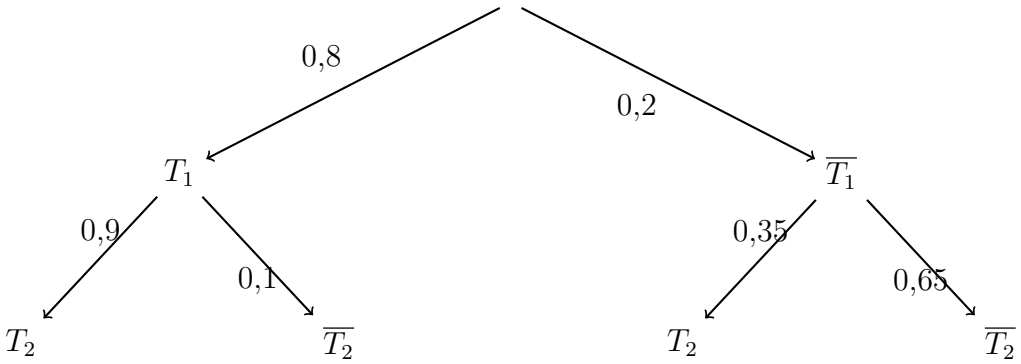
Probabilités et Arbre de Choix

Représentation sous forme d'Arbre de Probabilités

Soient les événements :

— T_1 : « L'ordinateur est jugé en bon état au 1er test » ($\overline{T_1}$ pour son contraire).

— T_2 : « L'ordinateur est jugé en bon état au 2e test » ($\overline{T_2}$ pour son contraire).



Calcul des probabilités de chaque branche

— $P(T_1 \cap T_2) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$ (Bon état aux deux tests $\implies$ Mis en vente)

— $P(T_1 \cap \overline{T_2}) = 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08$

— $P(\overline{T_1} \cap T_2) = 0{,}2 \times 0{,}35 = 0{,}07$

— $P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = 0{,}2 \times 0{,}65 = 0{,}13$

Partie : Probabilité d'être jugé en bon état à exactement un des tests

1. Identification des branches concernées :

— L'événement correspond à $(T_1 \cap \overline{T_2}) \cup (\overline{T_1} \cap T_2)$.

2. Calcul :

$$P(\text{Exactement 1 test}) = P(T_1 \cap \overline{T_2}) + P(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$P(\text{Exactement 1 test}) = 0{,}08 + 0{,}07 = 0{,}15$$

Conclusion : La probabilité qu'un ordinateur réussisse exactement un test est 0,15.

Partie : Probabilité d'être jugé en bon état à au moins un des tests

1. Méthode par l'événement contraire :

— Le contraire d'« au moins un test réussi » est « échec aux deux tests » ($\overline{T_1} \cap \overline{T_2}$).

2. Calcul :

$$P(\text{Au moins 1 test}) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2})$$

$$P(\text{Au moins 1 test}) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$$

Conclusion : La probabilité qu'un ordinateur réussisse au moins un test est 0,87.

Partie : Probabilité d'être mis en vente sachant qu'il a réussi au moins un test

1. Événement « Mis en vente » (V) :

— Seuls les ordinateurs jugés en bon état (aux deux tests) sont mis en vente : $V = T_1 \cap T_2$, d'où $P(V) = 0{,}72$.

2. Application de la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(V \mid \text{Au moins 1 test}) = \frac{P(V \cap \text{Au moins 1 test})}{P(\text{Au moins 1 test})}$$

Puisque réussir les deux tests implique qu'on en a réussi au moins un : $V \cap \text{Au moins 1 test} = V$.

$$P(V \mid \text{Au moins 1 test}) = \frac{0{,}72}{0{,}87} = \frac{72}{87} = \frac{24}{29} \approx 0{,}8276$$

Conclusion : La probabilité est de $\frac{24}{29} \approx 0{,}8276$.

Partie : Nombre d'ordinateurs mis en vente

1. Calcul de l'effectif :

— Nombre total d'ordinateurs : 250.

— Proportion d'ordinateurs mis en vente : $P(V) = 0{,}72$.

$$\text{Nombre d'ordinateurs} = 250 \times 0{,}72 = 180$$

Conclusion : 180 **ordinateurs** ont été mis en vente.

Partie : Tirage sans remise de deux ordinateurs

1. Composition de la population :

— Ordinateurs mis en vente (V) : 180

— Ordinateurs non mis en vente ($\overline{V}$) : $250 - 180 = 70$

2. Calcul des probabilités de tirage :

— Cas 1 : 1er mis en vente et 2nd non mis en vente :

$$P(V_1 \cap \overline{V_2}) = \frac{180}{250} \times \frac{70}{249} = \frac{12\,600}{62\,250}$$

— Cas 2 : 1er non mis en vente et 2nd mis en vente :

$$P(\overline{V_1} \cap V_2) = \frac{70}{250} \times \frac{180}{249} = \frac{12\,600}{62\,250}$$

3. Somme des deux cas :

$$P(\text{Exactement 1 mis en vente}) = \frac{12\,600 + 12\,600}{62\,250} = \frac{25\,200}{62\,250} = \frac{168}{415} \approx 0{,}4048$$

Conclusion : La probabilité qu'exactement un ordinateur soit mis en vente est $\frac{168}{415} \approx 0{,}4048$.

Énoncé de l'Exercice 4

4. La figure ci-contre représente un cercle. Le centre M du cercle se trouve sur l'axe des abscisses.
Le point A se trouve sur le cercle.
Le prolongement du segment MA coupe l'axe des ordonnées en un point B.
Données : $A(-16, 6)$; $B(0, 18)$.

. **(1)** Déterminez l'équation de la droite AB.
(2) Déterminez l'équation du cercle.

On trace une tangente au cercle qui passe par le point A et qui coupe l'axe des ordonnées en un point D.

. Déterminez les coordonnées du point D.

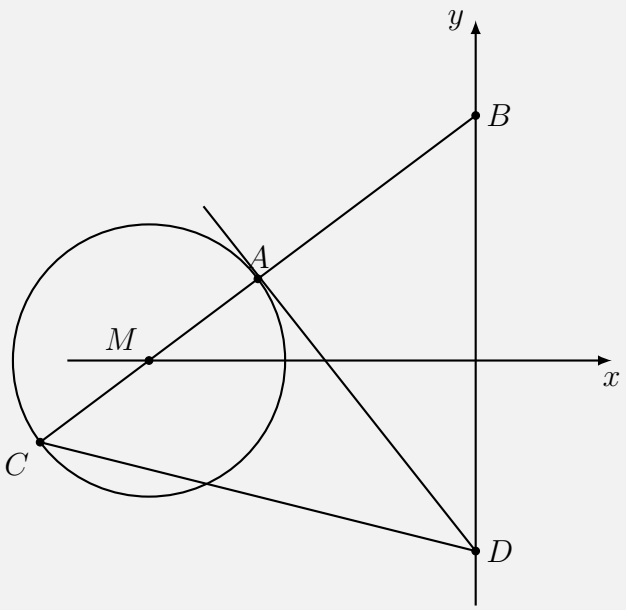
Le point C est un point du cercle tel que AC est un diamètre du cercle.

. Montrez que $BD = CD$.

. Calculez la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

Le point K se trouve sur le segment CD.
On sait que l'aire du triangle MCK vaut 90.

. Déterminez la longueur du segment CK.



Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Correction Détaillée — Exercice 4

Géométrie Analytique et Cercle

Partie (1) : Détermination de l'équation de la droite AB

1. Calcul de la pente (m_{AB}) :

— Les points donnés sont $A(-16, 6)$ et $B(0, 18)$.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{18 - 6}{0 - (-16)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

2. Équation de la droite :

— Le point $B(0, 18)$ donne directement l'ordonnée à l'origine $b = 18$.

$$y = \frac{3}{4}x + 18$$

Conclusion : L'équation de la droite AB est $y = \frac{3}{4}x + 18$.

Partie (2) : Détermination de l'équation du cercle

1. Recherche des coordonnées du centre M :

— Le centre M se trouve sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée est $y_M = 0$.

— Le centre M appartient également à la droite (AB). En remplaçant y par 0 dans l'équation de la droite :

$$0 = \frac{3}{4}x_M + 18 \implies \frac{3}{4}x_M = -18 \implies x_M = -18 \times \frac{4}{3} = -24$$

— Les coordonnées du centre sont $M(-24, 0)$.

2. Calcul du rayon au carré (R^2) :

— Le point $A(-16, 6)$ est sur le cercle, donc $R^2 = AM^2$:

$$R^2 = (-16 - (-24))^2 + (6 - 0)^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

Conclusion : L'équation du cercle est $(x + 24)^2 + y^2 = 100$.

Partie : Détermination des coordonnées du point D

1. Pente de la tangente (AD) :

— La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[MA]$ (droite AB).

$$m_{AD} \times m_{AB} = -1 \implies m_{AD} \times \frac{3}{4} = -1 \implies m_{AD} = -\frac{4}{3}$$

2. Équation de la droite (AD) :

— En passant par le point $A(-16, 6)$:

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - (-16)) \implies y = -\frac{4}{3}x - \frac{64}{3} + 6 \implies y = -\frac{4}{3}x - \frac{46}{3}$$

3. Intersection avec l'axe des ordonnées $(x = 0)$:

— Le point D est sur l'axe des ordonnées, donc $x_D = 0$:

$$y_D = -\frac{4}{3}(0) - \frac{46}{3} = -\frac{46}{3}$$

Conclusion : Les coordonnées du point D sont $\left(0, -\frac{46}{3}\right)$.

Partie : Démonstration de $BD = CD$

1. Coordonnées du point C :

— $[AC]$ est un diamètre du cercle de centre $M(-24, 0)$. Ainsi, M est le milieu de $[AC]$:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \implies -24 = \frac{-16 + x_C}{2} \implies x_C = -32$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \implies 0 = \frac{6 + y_C}{2} \implies y_C = -6$$

— Les coordonnées de C sont $C(-32, -6)$.

2. Calcul de la longueur BD :

— Les points $B(0, 18)$ et $D\left(0, -\frac{46}{3}\right)$ sont tous deux sur l'axe des ordonnées :

$$BD = y_B - y_D = 18 - \left(-\frac{46}{3}\right) = \frac{54 + 46}{3} = \frac{100}{3}$$

3. Calcul de la longueur CD :

— Par la formule de la distance entre $C(-32, -6)$ et $D\left(0, -\frac{46}{3}\right)$:

$$CD^2 = (0 - (-32))^2 + \left(-\frac{46}{3} - (-6)\right)^2 = 32^2 + \left(-\frac{28}{3}\right)^2 = 1024 + \frac{784}{9} = \frac{10000}{9}$$

$$CD = \sqrt{\frac{10000}{9}} = \frac{100}{3}$$

Conclusion : On a bien $BD = CD = \frac{100}{3}$.

Partie : Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$

1. Propriété du triangle BAD :

— Le triangle BAD est rectangle en A car (AD) est la tangente au cercle en A.

2. Calcul de la longueur AB :

$$AB = \sqrt{(0-(-16))^2 + (18-6)^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256+144} = \sqrt{400} = 20$$

3. Calcul de l'angle :

— Dans le triangle rectangle BAD :

$$\cos(\widehat{ABD}) = \frac{AB}{BD} = \frac{20}{\frac{100}{3}} = \frac{60}{100} = 0{,}6$$

$$\widehat{ABD} = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}13^\circ$$

Conclusion : La mesure de l'angle $\widehat{ABD}$ est d'environ 53,13°.

Partie : Détermination de la longueur du segment CK

1. Analyse du triangle CAD :

— $AC = 2R = 20$ (diamètre du cercle).

— Dans le triangle CAD rectangle en A, la tangente de l'angle $\widehat{ACK}$ vaut :

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{100}{3}\right)^2 - 20^2} = \frac{80}{3}$$

$$\tan(\widehat{ACK}) = \frac{AD}{AC} = \frac{80/3}{20} = \frac{4}{3}$$

— D'où $\sin(\widehat{ACK}) = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

2. Calcul via l'aire du triangle MCK :

— $MC = R = 10$.

— L'aire du triangle MCK s'exprime par la formule trigonométrique :

$$\text{Aire}(MCK) = \frac{1}{2} \times MC \times CK \times \sin(\widehat{MCK}) = 90$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times CK \times 0{,}8 = 90 \implies 4 \times CK = 90 \implies CK = \frac{90}{4} = 22{,}5$$

Conclusion : La longueur du segment CK est de 22,5.

Énoncé et Correction Détaillée

Géométrie Analytique et Trapèze Rectangle — Exercice 5

Énoncé de l'Exercice 5

5. La figure ci-contre représente un trapèze rectangle $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\widehat{ABC} = 90°$).
Le sommet B se trouve sur la partie négative de l'axe des abscisses.
Données : $A(0, 4)$; la longueur du côté AB vaut 5.

- Déterminez les coordonnées du sommet B.
- Déterminez l'équation du côté BC.

On sait que l'équation de la diagonale AC est $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

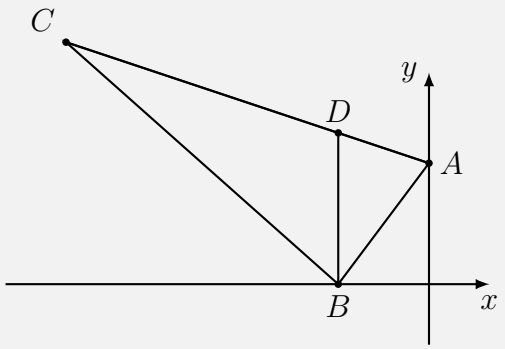
- Déterminez la longueur du côté BC.

M est le point d'intersection des diagonales du trapèze.

- Démontrez que $\triangle DMA \sim \triangle BMC$.

On sait que la longueur du segment AD vaut 3.

- Déterminez combien de fois l'aire du triangle BMC est supérieure à l'aire du triangle DMA.



Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Détermination des coordonnées du sommet B

1. Propriété du point B :

— B se trouve sur l'axe des abscisses ($y = 0$) dans sa partie négative, donc $B(x_B, 0)$ avec $x_B < 0$.

2. Formule de la distance AB :

— La distance entre $A(0, 4)$ et $B(x_B, 0)$ est égale à 5 :

$$AB^2 = (x_B - 0)^2 + (0 - 4)^2 = 5^2$$

$$x_B^2 + 16 = 25 \implies x_B^2 = 9$$

— Puisque $x_B < 0$, on retient $x_B = -3$.

Conclusion : Les coordonnées du sommet B sont $B(-3, 0)$.

Partie : Détermination de l'équation du côté BC

1. Calcul de la pente m_{AB} :

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - 0}{0 - (-3)} = \frac{4}{3}$$

2. Condition de perpendicularité ($\widehat{ABC} = 90°$) :

— Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires, donc leurs pentes vérifient $m_{AB} \times m_{BC} = -1$:

$$m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{3}{4}$$

3. Équation de la droite (BC) :

— La droite passe par $B(-3, 0)$ avec une pente de $-\frac{3}{4}$:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - (-3)) \implies y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

Conclusion : L'équation du côté BC est $y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Partie : Calcul de la longueur du côté BC

1. Coordonnées du sommet C :

— C est l'intersection de la droite (BC) et de la diagonale (AC) d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 4$:

$$-\frac{3}{4}x - \frac{9}{4} = -\frac{1}{3}x + 4$$

— En multipliant toute l'équation par 12 :

$$-9x - 27 = -4x + 48 \implies -5x = 75 \implies x_C = -15$$

— Calcul de y_C :

$$y_C = -\frac{1}{3}(-15) + 4 = 5 + 4 = 9$$

— Les coordonnées de C sont $C(-15, 9)$.

2. Calcul de la distance BC :

$$BC = \sqrt{(-15-(-3))^2 + (9-0)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 9^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$$

Conclusion : La longueur du côté BC est 15.

Partie : Démonstration de la similitude $\triangle DMA \sim \triangle BMC$

1. Analyse des angles opposés par le sommet :

— Les angles $\widehat{AMD}$ et $\widehat{BMC}$ sont égaux car ils sont opposés par le sommet :

$$\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$$

2. Analyse des angles alternes-internes :

— Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze de bases parallelès ($AD \parallel BC$), la sécante (AC) forme des angles alternes-internes égaux :

$$\widehat{MAD} = \widehat{MCB}$$

— De même, la sécante (BD) forme des angles alternes-internes égaux :

$$\widehat{ADM} = \widehat{CBM}$$

Conclusion : D'après le critère de similitude Angle-Angle (AA), les triangles sont semblables : $\triangle DMA \sim \triangle BMC$.

Partie : Rapport des aires des triangles BMC et DMA

1. Calcul du rapport de similitude (k) :

— Les côtés homologues sont BC et AD avec $BC = 15$ et $AD = 3$:

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{3} = 5$$

2. Rapport des aires :

— Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport de similitude (k^2) :

$$\frac{\text{Aire}(\triangle BMC)}{\text{Aire}(\triangle DMA)} = k^2 = 5^2 = 25$$

Conclusion : L'aire du triangle BMC est 25 **fois supérieure** à l'aire du triangle DMA.

Énoncé et Correction Détaillée

Étude de Fonction Rationnelle avec Paramètre — Exercice 6

Énoncé de l'Exercice 6

6. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9} + a$.
a est un paramètre.

- Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- Démontrez que la fonction $f(x)$ est paire.

On sait que le graphe de la fonction $f(x)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x = \sqrt{3}$.

- Déterminez la valeur de a.

Substituez $a = 2$ dans la fonction $f(x)$ et répondez aux articles –.

- **(1)** Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
  (2) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.
  (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.
  (4) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = f(x - 7)$.

- **(1)** Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
  (2) La fonction $g(x)$ est-elle paire ? Justifiez votre réponse.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Domaine de définition

1. Condition d'existence :

— Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x^2 - 9 \neq 0$.

— $x^2 \neq 9 \implies x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Conclusion : Le domaine de définition est $x \neq 3$ **et** $x \neq -3$ (ou $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$).

Partie : Parité de la fonction $f(x)$

1. Vérification du domaine :

— Le domaine de définition est symétrique par rapport à zéro : si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$.

2. Calcul de $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{4(-x)^2}{(-x)^2 - 9} + a = \frac{4x^2}{x^2 - 9} + a = f(x)$$

Conclusion : Comme $f(-x) = f(x)$, la fonction $f(x)$ est **paire**. Son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (y).

Partie : Détermination de la valeur du paramètre a

1. Utilisation de l'intersection avec l'axe x :

— Le graphe coupe l'axe des x au point $(\sqrt{3}, 0)$, donc $f(\sqrt{3}) = 0$.

$$\frac{4(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 9} + a = 0 \implies \frac{4(3)}{3 - 9} + a = 0$$

$$\frac{12}{-6} + a = 0 \implies -2 + a = 0 \implies a = 2$$

Conclusion : La valeur de a est $a = 2$. La fonction s'écrit désormais $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9} + 2$.

Partie (1) : Points d'intersection avec les axes

1. Intersection avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) :

$$f(0) = \frac{4(0)^2}{0^2 - 9} + 2 = 0 + 2 = 2 \implies (0, 2)$$

2. Intersection avec l'axe des abscisses ($y = 0$) :

$$f(x) = 0 \implies \frac{4x^2}{x^2 - 9} + 2 = 0 \implies \frac{4x^2 + 2(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = 0$$

$$4x^2 + 2x^2 - 18 = 0 \implies 6x^2 = 18 \implies x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}$$

Conclusion : Les points d'intersection sont $(0, 2)$, $(\sqrt{3}, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0)$.

Partie (2) : Extremum et sa nature

1. Calcul de la dérivée $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2-9} + 2 \implies f'(x) = \frac{(8x)(x^2-9) - (4x^2)(2x)}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 72x - 8x^3}{(x^2-9)^2} = \frac{-72x}{(x^2-9)^2}$$

2. Recherche des points critiques ($f'(x) = 0$) :

$$-72x = 0 \implies x = 0$$

$$f(0) = 2 \implies \text{Point critique : } (0, 2)$$

x	⊖④	-3	⊖①	0	①	3	④
f'	$+$	▨	$+$		$-$	▨	$-$
f	↗	▨	↗	**MAX**	↘	▨	↘

Détail des calculs de la dérivée :

$\underline{x = -4 :}$ $y'(-4) = -72 \cdot (-4) = 288 > 0$

$\underline{x = -1 :}$ $y'(-1) = -72 \cdot (-1) = 72 > 0$

$\underline{x = 1 :}$ $y'(1) = -72 \cdot 1 = -72 < 0$

$\underline{x = 4 :}$ $y'(4) = -72 \cdot 4 = -288 < 0$

Partie (3) : Intervalles de croissance et de décroissance

Croissance : $f'(x) > 0$: $x < -3$ et $-3 < x < 0$.

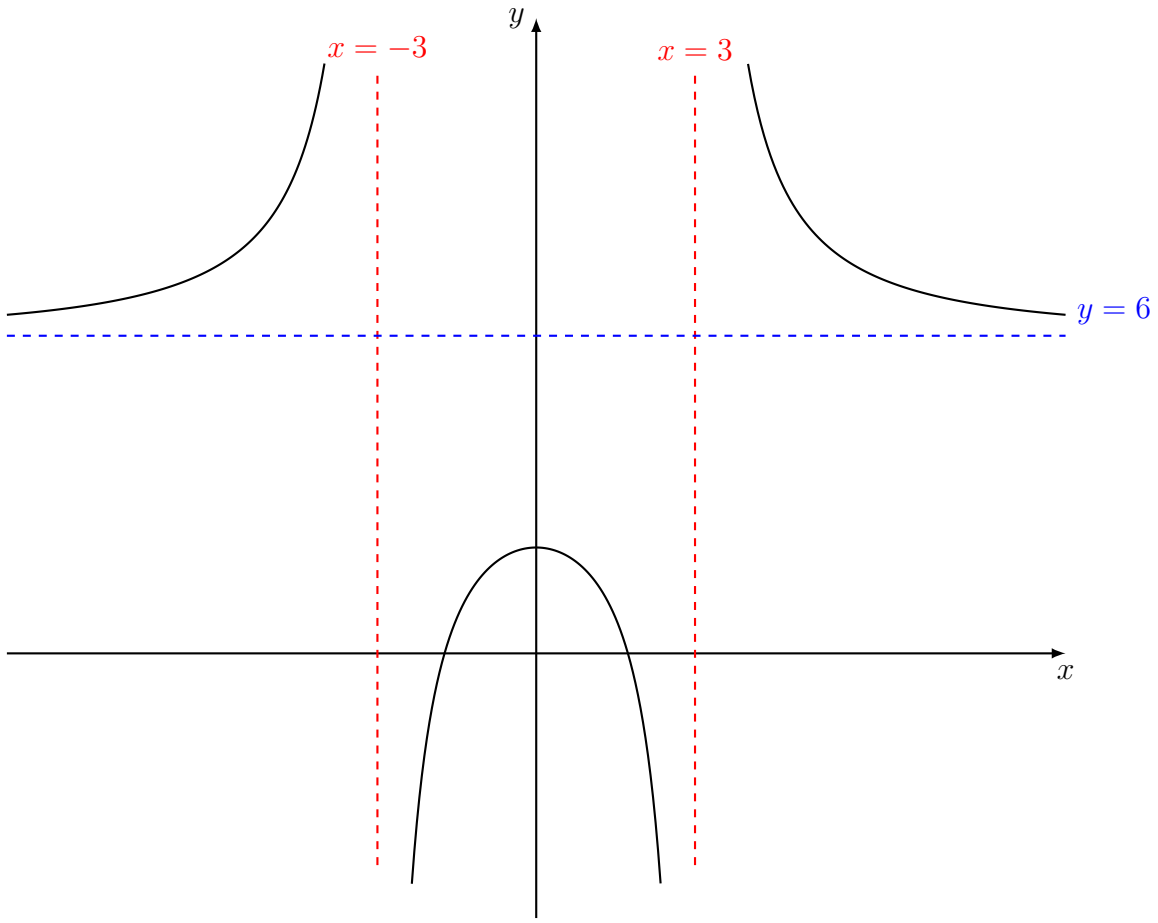
Décroissance : $f'(x) < 0$: $0 < x < 3$ et $x > 3$.

Partie (4) : Asymptotes perpendiculaires aux axes

Asymptotes verticales : D'après de domaine de définition : $x = 3$ et $x = -3$

Asymptote horizontale : $y = \frac{4x^2}{x^2} + 2 \implies y = 4 + 2 \implies y = 6$

Partie : Esquisse du graphe de $f(x)$



Partie (1) : Asymptotes de $g(x) = f(x-7)$

1. Interprétation géométrique :

— La fonction $g(x) = f(x-7)$ est une translation horizontale de la courbe de $f(x)$ de 7 unités vers la droite.

2. Nouvelles asymptotes :

— **Asymptotes verticales :** Les droites $x = -3$ et $x = 3$ sont décalées de $+7$:

$$x = -3 + 7 = 4 \quad \text{et} \quad x = 3 + 7 = 10$$

— **Asymptote horizontale :** Une translation horizontale ne modifie pas l'asymptote horizontale :

$$y = 6$$

Conclusion : Les asymptotes de $g(x)$ sont $x = 4$, $x = 10$ et $y = 6$.

Partie (2) : Étude de la parité de $g(x)$

1. Analyse du domaine de définition de $g(x)$:

— Le domaine de $g(x)$ s'obtient en décalant de $+7$ le domaine de $f(x)$: $x \neq 4$ et $x \neq 10$.

— Ce domaine n'est pas symétrique par rapport à l'origine 0 (par exemple, $x = 4$ est exclu du domaine, mais $x = -4$ y appartient).

Conclusion : La fonction $g(x)$ **n'est pas paire**.

Énoncé et Correction Détaillée

Étude de Fonction Irrational et Calcul Intégral — Exercice 7

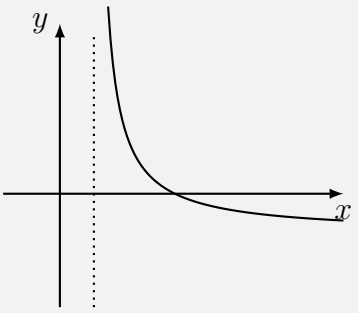
Énoncé de l'Exercice 7

7. Soit la fonction $f(x) = 2x - 4\sqrt{5x - 16}$.

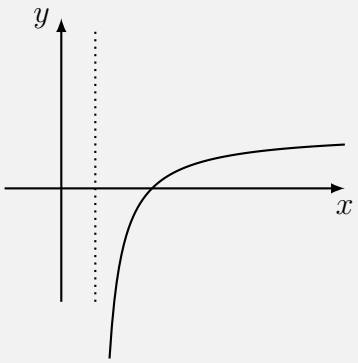
- Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.
- Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

La fonction dérivée $f'(x)$ est définie sur l'intervalle $x > 3{,}2$.

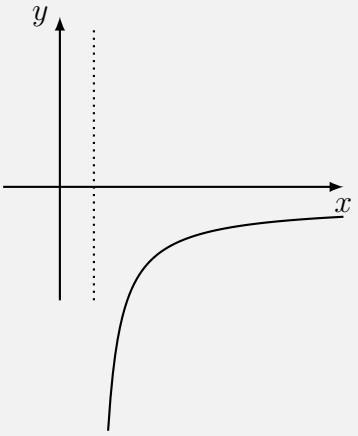
- **(1)** Déterminez lequel des graphes I–IV représente la fonction dérivée $f'(x)$.
  (2) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction dérivée $f'(x)$, l'axe des abscisses et les droites $x = 4$ et $x = 13$.



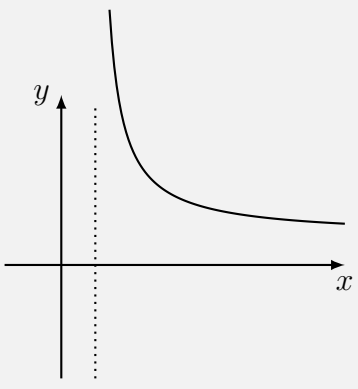
II



I



IV



III

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Domaine de définition

1. Condition d'existence de la racine carrée :

— L'expression sous la racine doit être supérieure ou égale à zéro :

$$5x - 16 \geq 0 \implies 5x \geq 16 \implies x \geq \frac{16}{5} \iff x \geq 3{,}2$$

Conclusion : Le domaine de définition de la fonction est $x \geq 3{,}2$.

Partie : Points d'intersection avec l'axe des abscisses

1. Résolution de l'équation $f(x) = 0$:

$$2x - 4\sqrt{5x - 16} = 0 \implies 2x = 4\sqrt{5x - 16} \implies x = 2\sqrt{5x - 16}$$

2. Élévation au carré (sous réserve de $x \geq 0$) :

$$x^2 = \left(2\sqrt{5x - 16}\right)^2 \implies x^2 = 4(5x - 16) \implies x^2 = 20x - 64$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

3. Factorisation et vérification des solutions :

$$(x - 4)(x - 16) = 0 \implies x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 16$$

— Pour $x = 4$: $f(4) = 2(4) - 4\sqrt{20 - 16} = 8 - 4(2) = 0$ (Valide).

— Pour $x = 16$: $f(16) = 2(16) - 4\sqrt{80 - 16} = 32 - 4(8) = 0$ (Valide).

Conclusion : Les points d'intersection avec l'axe des x sont $(4, 0)$ et $(16, 0)$.

Partie : Recherche des points d'extremum et leur nature

1. Calcul de la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 - 4 \times \frac{5}{2\sqrt{5x - 16}} = 2 - \frac{20}{2\sqrt{5x - 16}} = \frac{4\sqrt{5x - 16} - 20}{2\sqrt{5x - 16}}$$

2. Recherche des points critiques ($f'(x) = 0$) :

$$4\sqrt{5x - 16} - 20 = 0 \implies 4\sqrt{5x - 16} = 20 \implies \sqrt{5x - 16} = \frac{20}{4} \implies \sqrt{5x - 16} = 5$$

$$5x - 16 = 25 \implies 5x = 41 \implies x = 8{,}2$$

$$f(8{,}2) = 2(8{,}2) - 4\sqrt{5(8{,}2) - 16} = 16{,}4 - 4(5) = 16{,}4 - 20 = -3{,}6$$

3. Étude du signe de la dérivée et de la nature de l'extremum :

x	-4	-3	-1	0	1	3	4
f'	$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$
f	↗	‖	↗	**MAX**	↘	‖	↘

Détail des calculs de la dérivée :

$\underline{x = -4 :}$ $y'(-4) = -72 \cdot (-4) = 288 > 0$

$\underline{x = -1 :}$ $y'(-1) = -72 \cdot (-1) = 72 > 0$

$\underline{x = 1 :}$ $y'(1) = -72 \cdot 1 = -72 < 0$

$\underline{x = 4 :}$ $y'(4) = -72 \cdot 4 = -288 < 0$

- Pour $3{,}2 < x < 8{,}2$ (ex : $x = 4$) : $f'(4) = 2 - \frac{10}{2} = -3 < 0 \implies f$ est décroissante.
- Pour $x > 8{,}2$ (ex : $x = 13$) : $f'(13) = 2 - \frac{10}{7} > 0 \implies f$ est croissante.
- Le point $(8{,}2\,;-3{,}6)$ est donc un **minimum local**.

4. Point de bordure du domaine ($x = 3{,}2$) :

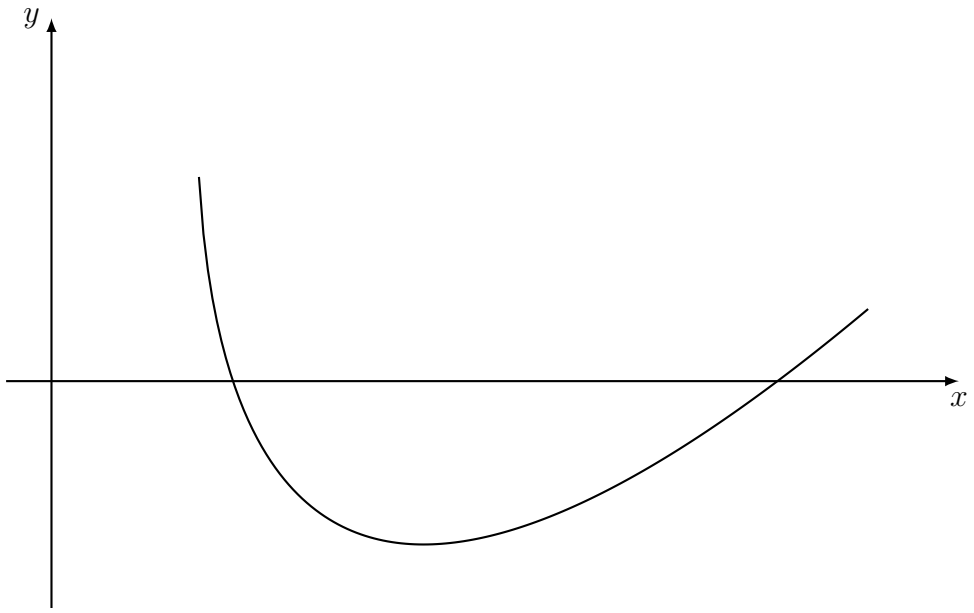
$$f(3{,}2) = 2(3{,}2) - 4\sqrt{0} = 6{,}4$$

Puisque la fonction décroît à partir de $x = 3{,}2$, le point d'origine du domaine est un **maximum absolu de bordure**.

Conclusion :

- Minimum local : $(8{,}2\,;-3{,}6)$.
- Maximum de bordure : $(3{,}2\,;6{,}4)$.

Partie : Esquisse du graphe de la fonction $f(x)$



Partie (1) : Identification du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$

1. Propriétés de $f'(x)$ sur $x > 3{,}2$:

- Pour $3{,}2 < x < 8{,}2$, $f'(x) < 0$ (le graphe de f' est sous l'axe des x).
- En $x = 8{,}2$, $f'(8{,}2) = 0$ (le graphe coupe l'axe des x).
- Pour $x > 8{,}2$, $f'(x) > 0$ (le graphe est au-dessus de l'axe des x).
- Lorsque $x \to 3{,}2^+$, $\sqrt{5x-16} \to 0^+$, donc $\lim_{x\to 3{,}2^+} f'(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 3{,}2$).
- Lorsque $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$ (asymptote horizontale $y = 2$).

Conclusion : Le graphe qui présente une asymptote verticale en $x = 3{,}2$, s'annule en $x = 8{,}2$ et tend vers $y = 2$ à l'infini est le **Graphe III**.

Partie (2) : Calcul de l'aire délimitée par le graphe de $f'(x)$

1. Analyse du signe de $f'(x)$ sur $[4, 13]$:

- De $x = 4$ à $x = 8{,}2$, $f'(x) \leq 0$.
- De $x = 8{,}2$ à $x = 13$, $f'(x) \geq 0$.

2. Calcul de l'aire par l'intégrale :

$$\text{Aire} = \int_4^{8{,}2} -f'(x)\,dx + \int_{8{,}2}^{13} f'(x)\,dx$$

$$\text{Aire} = -\Big[f(x)\Big]_4^{8{,}2} + \Big[f(x)\Big]_{8{,}2}^{13}$$

$$\text{Aire} = -\big(f(8{,}2) - f(4)\big) + \big(f(13) - f(8{,}2)\big)$$

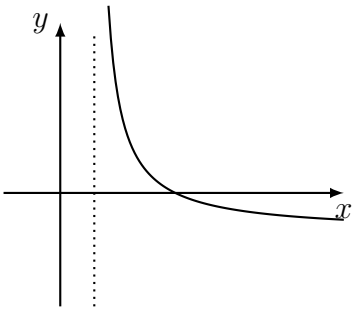
3. Évaluation des valeurs de la fonction :

— $f(4) = 0$
— $f(8{,}2) = -3{,}6$
— $f(13) = 2(13) - 4\sqrt{5(13) - 16} = 26 - 4\sqrt{49} = 26 - 28 = -2$

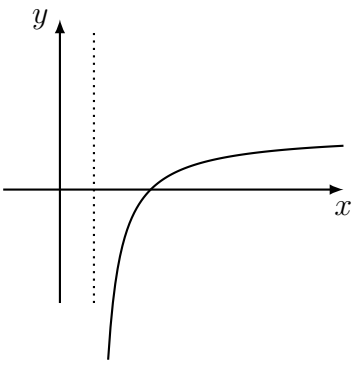
4. Application numérique :

$$\text{Aire} = -\big(-3{,}6 - 0\big) + \big(-2 - (-3{,}6)\big) = 3{,}6 + 1{,}6 = 5{,}2$$

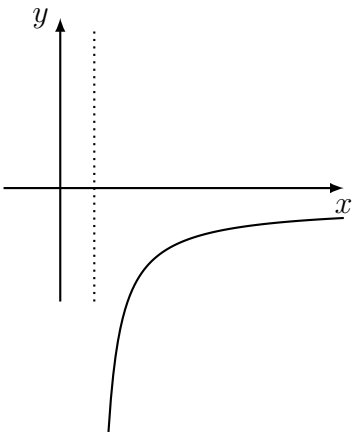
Conclusion : L'aire délimitée est de 5,2 **unités d'aire**.



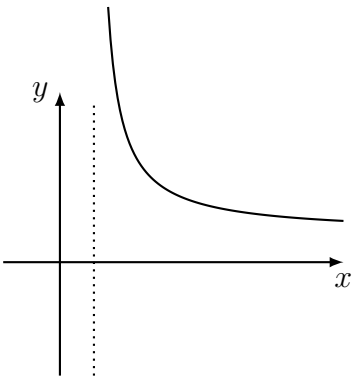
II



I



IV



III

Énoncé et Correction Détaillée

Problème d'Optimisation et d'Extremum — Exercice 8

Énoncé de l'Exercice 8

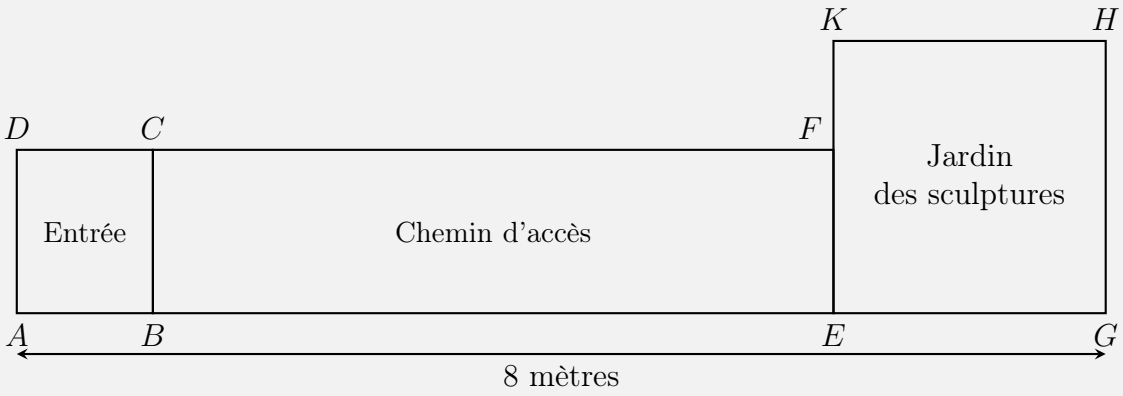
8. Une paysagiste a conçu les plans d'un espace public.
Cet espace est composé de trois parties reliées entre elles :

— l'entrée – le rectangle $ABCD$.

— le chemin d'accès – le rectangle $BEFC$.

— le jardin des sculptures – le carré $EGHK$.

Les points A, B, E, G se trouvent sur une même droite, comme indiqué sur la figure.



La longueur du segment AG vaut 8 mètres.
La longueur du côté EG est 2 fois supérieure à la longueur du côté AB.
On note x la longueur du côté AB.

. Exprimez la longueur du côté BE en fonction de x.

On sait que l'aire de l'entrée vaut 1 m^2.

. **(1)** Exprimez la longueur du côté AD en fonction de x.
(2) Exprimez l'aire totale de cet espace en fonction de x.

. Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire totale de cet espace est minimale.

. Est-il possible que l'aire totale de cet espace vaille 9 m^2 ? Justifiez votre réponse.

Correction Détaillée (Méthode Israélienne)

Partie : Expression de BE en fonction de x

1. Analyse des segments :

— La longueur totale du segment $[AG]$ est $AG = 8$ mètres.

— La longueur du côté AB vaut x.

— La longueur du côté EG est égale à $2x$ (2 fois supérieure à AB).

— Les points A, B, E, G sont alignés dans cet ordre, donc :

$$AG = AB + BE + EG$$

2. Calcul de BE :

$$8 = x + BE + 2x \implies 8 = 3x + BE \implies BE = 8 - 3x$$

Conclusion : La longueur du côté BE en fonction de x est $BE = 8 - 3x$.

Partie (1) : Expression du côté AD en fonction de x

1. Utilisation de l'aire de l'entrée :

— L'entrée $ABCD$ est un rectangle d'aire 1 m^2.

— L'aire du rectangle s'exprime par : $\text{Aire}(ABCD) = AB \times AD = 1$.

— Comme $AB = x$, on a :

$$x \times AD = 1 \implies AD = \frac{1}{x}$$

Conclusion : La longueur du côté AD en fonction de x est $AD = \dfrac{1}{x}$.

Partie (2) : Expression de l'aire totale en fonction de x

1. Calcul des aires des trois parties :

— **Aire de l'entrée $ABCD$:** $\text{Aire}_1 = 1$ m^2 (donnée de l'énoncé).

— **Aire du chemin d'accès $BEFC$:** Le rectangle $BEFC$ a pour largeur $BE = 8 - 3x$ et pour hauteur $BC = AD = \dfrac{1}{x}$.

$$\text{Aire}_2 = BE \times BC = (8 - 3x) \times \frac{1}{x} = \frac{8}{x} - 3$$

— **Aire du jardin des sculptures $EGHK$:** C'est un carré de côté $EG = 2x$.

$$\text{Aire}_3 = EG^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

2. Calcul de l'aire totale $S(x)$:

$$S(x) = \text{Aire}_1 + \text{Aire}_2 + \text{Aire}_3 = 1 + \left(\frac{8}{x} - 3\right) + 4x^2 = 4x^2 + \frac{8}{x} - 2$$

Conclusion : L'aire totale de cet espace en fonction de x est $S(x) = 4x^2 + \dfrac{8}{x} - 2$.

Partie : Détermination de x pour une aire totale minimale

1. Calcul de la fonction dérivée $S'(x)$:

$$S(x) = 4x^2 + 8x^{-1} - 2 \implies S'(x) = 8x - \frac{8}{x^2}$$

2. Recherche du point critique ($S'(x) = 0$) :

$$8x - \frac{8}{x^2} = 0 \implies 8x = \frac{8}{x^2} \implies 8x^3 = 8 \implies x^3 = 1 \implies x = 1$$

3. Vérification du type d'extremum (Seconde dérivée) :

$$S''(x) = 8 + \frac{16}{x^3}$$

$$S''(1) = 8 + 16 = 24 > 0$$

Puisque $S''(1) > 0$, la fonction présente un **minimum** en $x = 1$.
Conclusion : L'aire totale de cet espace est minimale pour $x = 1$ **mètre**.

Partie : Possibilité que l'aire totale vaille 9 m^2

1. Calcul de l'aire minimale :

— L'aire minimale s'obtient en remplaçant $x = 1$ dans la fonction d'aire $S(x)$:

$$S(1) = 4(1)^2 + \frac{8}{1} - 2 = 4 + 8 - 2 = 10 \text{ m}^2$$

2. Analyse géométrique et algébrique :

— La valeur minimale absolue de l'aire de cet espace est de 10 m^2.

— Par conséquent, l'aire totale $S(x)$ vérifie la relation $S(x) \geq 10$ m^2 pour tout $x > 0$ valide.

Conclusion : Il est **impossible** que l'aire totale vaille 9 m^2, car la valeur minimale de l'aire totale est de 10 m^2.

x	ⓞ	-3	ⓞ	0	①	3	④
f'	$+$	▨	$+$		$-$	▨	$-$
f	↗	▨	↗	**MAX**	↘	▨	↘

Détail des calculs de la dérivée :

$\underline{x = -4 :}$ $y'(-4) = -72 \cdot (-4) = 288 > 0$

$\underline{x = -1 :}$ $y'(-1) = -72 \cdot (-1) = 72 > 0$

$\underline{x = 1 :}$ $y'(1) = -72 \cdot 1 = -72 < 0$

$\underline{x = 4 :}$ $y'(4) = -72 \cdot 4 = -288 < 0$